Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
December 25, 2012

Auxiliar #6MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Estudie la continuidad y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \left[\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right]^2 & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

P2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Muestre que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

b) Pruebe que f es continua en $(0,0)$.

c) Calcule la derivadas parciales de f.

d) Determine si f es diferenciables en $(0,0)$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y-x} \displaystyle\int_x^y e^{-t^2} dt & x \neq y \\ e^{-x^2} & x = y \end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua.

b) Demuestre que f es diferenciable en el conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | x = y\}^c$

c) Demuestre que f satisface las siguientes Ecuaciones Diferenciales Parciales en C:

$$(1) \ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{-y^2} - e^{-x^2}}{y-x}$$

$$(2) \ (y-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(3) \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{e^{-x^2}x - e^{-y^2}y}{y-x}$$

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definimos el operador lapaciano

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

a) Considere las coordenadas polares

$$x = \rho\cos(\theta) \quad y = \rho\sin(\theta)$$

En que $\rho \in [0, +\infty)$ $\theta \in [0, 2\pi)$. Muestre que si se define $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$, para $\rho \neq 0$ se tiene.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Diga donde están evaluadas las derivadas.

Nota: Utilice que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

b) **Propuesto** Considere las coordenadas elípticas

$$x = \cosh(u)\cos(v) \quad y = \sinh(u)\sin(v)$$

En que $u \in \mathbb{R}$ $v \in [0, 2\pi)$. Muestre que si se define $g(u, v) = f(\cosh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v))$, para $\rho \neq 0$ se tiene.

$$\Delta f = \frac{1}{\sinh^2(u) + \sin^2(v)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)$$

Diga donde están evaluadas las derivadas. Recuerde que

$$\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

P5. Propuesto: Calcule el Gradiente o el Jacobiano según corresponda:

a) $H(x, y, z) = f((f(x, y, z), g(x, z)))$ Donde:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Ambas f y g diferenciables en todo el dominio.

b) $\pi(x, y) = f(x + y, g(x, y), h(y, x))$ evaluado en $(0, 1)$. Donde:

$$f(x, y, z) = (xsen(z), ycos(z))$$

$$g(x, y) = y^2 cos(x)$$

$$h(x, y) = -y \ln(cos(x))$$