Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
December 20, 2012

Auxiliar #4MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. :

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Determine la existencia de los siguientes limites.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$ donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|y|}}}{|y|+e^{-\frac{1}{|x|}}}$

P2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $A \subseteq E$. Se define la distancia desde un punto $x \in E$ a el conjunto A como

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$$

a) Muestre que $d(\cdot, A) : E \to \mathbb{R}$ es continua.

b) Muestre que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$

P3. Sea $\ell : E \to F$ una función lineal. Muestre que son equivalentes:

a) ℓ es continua.

b) ℓ es continua en algún punto.

c) ℓ es continua en 0.

d) Existe $M \geq 0$ tal que $\|\ell(x)\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in E$

P4. Sea $E_0 := C[a,b]$ y $E_1 := C^1[a,b]$. Sea $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$ par $f \in E_1$.

a) Sea $D : (E_1, \|\cdot\| \to (E_0, \|\cdot\|_\infty)$ definida por $D(f) = f'$. Muestre que D es continua.

b) Sea $D : (E_1, \|\cdot\|_\infty \to (E_0, \|\cdot\|_\infty)$ definida por $D(f) = f'$. Muestre que D es discontinua.

P5. Considere $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ definida como:

$$T[f](x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

a) Muestre que T esta bien definida.

b) Pruebe que T es lineal.

c) Pruebe que $T : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ es continua. ¿Que sucede cuando la norma del espacio de llegada es $\|\cdot\|_\infty$?

d) Pruebe que el conjunto $I_\infty = \{f \in C([a,b]) \mid T[f] = f\}$ es cerrado para $\|\cdot\|_\infty$

e) ¿Bajo que condiciones T es contractante? ¿Que sucede?

P6. Propuesto: Sea $K : A \times B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua, donde A es un conjunto compacto. Pruebe que $f : B \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(t) := \max_{y \in A} K(t, y)$$

es continua

P7. Propuesto: Encuentre la superficie y la curva de nivel correspondiente a las siguientes funciones en la figura:

a) $z = \frac{1}{9}x^3 \sin(y)$.

b) $z = \sin(y)$.

c) $z = -\sin(x)\sin(y)$.

d) $z = \sin(y) - \frac{1}{9}x^3$.

e) $z = 3e^{x/5}\sin(y)$.

f) $z = \frac{1}{2}x^2 + \sin^2(y)$.

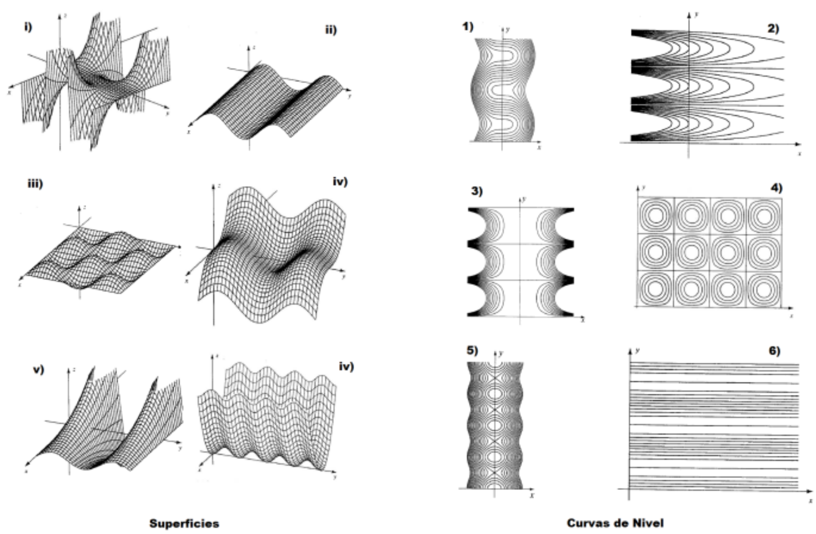

Figure 1: