Límite y continuidad de funciones de varias variables

20 de marzo de 2009

1 Subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades

Definición 1. Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la bola de centro $\mathbf{x}$ y radio r es

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Definición 2. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice *abierto* si dado cualquier $\mathbf{x} \in A$ existe una bola $B(\mathbf{x}, r)$, centrada en $\mathbf{x}$, contenida en A.

Ejemplo 1. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ y $R > 0$. El conjunto $A = B(\mathbf{z}, R)$ es abierto. En efecto, sea $\mathbf{x} \in A$. Si tomamos $r = R - \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ resulta $r > 0$ y resulta $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$. En efecto, si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ entonces $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r + \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = R$.

Ejemplo 2. $C = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y}\| \leq 1\right\}$ no es abierto pues si tomamos un $\mathbf{y}$ de norma igual a uno ($\|\mathbf{y}\| = 1$), cualquier bola centrada en $\mathbf{y}$ contiene puntos de norma mayor que uno, o sea del complemento de C y por lo tanto para todo $r > 0$, $B(\mathbf{y}, r) \subsetneq C$.

Nota El conjunto $\emptyset$ se considera abierto.

Propiedades

1) $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos.
2) La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
3) La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Definición 3. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ se dice *cerrado* si su complemento $\mathbb{R}^n - C$ es abierto.

Ejemplo 3. $C = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y}\| \leq 1\right\}$ es cerrado porque se puede ver fácilmente que $\mathbb{R}^n - C = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y}\| > 1\right\}$ es abierto.

Propiedades

1) $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son cerrados.

2) La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

3) La unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado .

Para intervalos de $\mathbb{R}$ la terminología "abierto" y "cerrado" que acabamos de introducir coincide con la habitual.

Un conjunto puede no ser abierto ni cerrado. Por ejemplo el intervalo $[a, b)$.

Definición 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in A$ se dice *punto de acumulación de* A si para cada $r > 0$, la bola $B(\mathbf{x}, r)$ contiene puntos de A distintos de $\mathbf{x}$. Un punto $\mathbf{x} \in A$ que no es punto de acumulación de A se dice un *punto aislado de* A.

Definición 5. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice *acotado* si existe $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para cada $\mathbf{x} \in A$ (o sea si A está contenido en una bola centrada en el origen de radio M). Una función F a valores en $\mathbb{R}^m$ se dice *función acotada* si su imagen es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^m$.

2 Límite

Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ con dominio $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 3\right\}$. Si el punto (x, y) está cerca del origen, tanto x como y están cerca de cero y por lo tanto $f(x, y)$ está cerca de 3. Esto se expresa diciendo que $f(x, y)$ tiende a 3 si (x, y) tiende al origen. Formalmente tenemos la siguiente

Definición 6. Sea F una función definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto de acumulación de A. Se dice que $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ *es el límite de* F *para* $\mathbf{x}$ *que tiende a* $\mathbf{x}_0$ y se escribe

$$\mathbf{l} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} F(\mathbf{x})$$

si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| < \varepsilon.$$

Esto dice: $\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\} \cap B(\mathbf{x}_0, \delta) \Longrightarrow F(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{l}, \varepsilon)$.

Teorema 1. Sea $F = (f_1, ..., f_m)$ una función definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto de acumulación de A. Entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, ..., l_m)$$

si y sólo si para cada $i = 1, ..., m$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i.$$

O sea F tiende a $\mathbf{l}$ si cada función coordenada de F tiende a la correspondiente coordenada de $\mathbf{l}$.

Demostración. Supongamos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| < \varepsilon$. Como

$$\|F(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| = \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - l_1)^2 + ... + (f_m(\mathbf{x}) - l_m)^2} \geq |f_i(\mathbf{x}) - l_i|$$

se tiene también que $|f_i(\mathbf{x}) - l_i| < \varepsilon$ y esto demuestra que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i$.

Supongamos ahora que cada f_i tiende a l_i para $\mathbf{x}$ que tiende a $\mathbf{x}_0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_i > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_i \Longrightarrow \|f_i(\mathbf{x}) - l_i\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

sea $\delta = \min_{1\leq i\leq m} \delta_i$, entonces $\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|^2$

$$= (f_1(\mathbf{x}) - l_1)^2 + ... + (f_m(\mathbf{x}) - l_m)^2 < \frac{\varepsilon^2}{m} + ... + \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon^2.$$

Nota. Para el caso de funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, este teorema muestra que la definición actual de límite coincide con la que ya habíamos dado en el capítulo anterior.

Se pueden demostrar, para funciones vectoriales de varias variables, muchos de los teoremas del cálculo de funciones de una variable. Por el teorema anterior, basta estudiar las propiedades de las funciones coordenadas.

Teorema 2. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_2$

1) Unicidad del límite. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lambda_1$ entonces $\lambda_1 = l_1$.

2) Acotación local. Existe una bola $B(\mathbf{x}_0, r)$ y $M > 0$ tal que$\|f(\mathbf{x})\| < M$ para todo $\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\} \cap B(\mathbf{x}_0, r)$.

3) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.

4) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = \mathbf{l}_1\mathbf{l}_2$.

5) Permanencia del signo para funciones a valores reales. Si $\mathbf{l}_1 > 0$ entonces existe una bola $B(\mathbf{x}_0, r)$ tal que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in A - \{\mathbf{x}_0\} \cap B(\mathbf{x}_0, r)$. Vale también el resultado análogo si $\mathbf{l}_1 < 0$.

Demostración. Es completamente análoga a la demostración que se hace en el caso de funciones reales de variable real.

Es altamente recomendable tratar de hacerla!!

Nota Es importante no confundir el límite en varias variables con un proceso de límite iterado. Por ejemplo si tomamos

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \leq |x| \\ 0 & \text{si } |y| > |x| \end{cases}$$

y $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, el $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x,y) \right) = 0$, y el $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} f(x,y) \right) = 1$. Ambos límites existen, pero el $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ no existe. En efecto, si f tuviera un límite l, dado $\varepsilon = \frac{1}{4}$, debería existir $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - l| < \frac{1}{4}$ para todo $(x,y) \in B((0,0), \delta)$. Pero en dicha bola están $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ y $(0, \frac{\delta}{2})$, $f\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) = 1$ y entonces $1 = \left|f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) - f\left(0, \frac{\delta}{2}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) - l\right| + \left|f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) - l\right| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, absurdo.

La proposición que enunciaremos ahora facilita en muchos casos la comprobación de la no existencia del límite.

Proposición 1. Sean $f : A \to \mathbb{R}^m$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$. Sea $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t < b$, una curva con imagen contenida contenida en A tal que $\lim\limits_{t \to b} \mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0$. Entonces

$$\lim_{t \to b} f(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{l}.$$

O sea el límite existe y es el mismo acercándonos a $\mathbf{x}_0$ por cualquier curva. Por lo tanto, a la hora de decidir la existencia del límite, muchas veces conviene acercarse a $\mathbf{x}_0$ por distintas curvas (rectas, parábolas, etc.) sobre las cuales los valores de la función, y por lo tanto su límite, son fáciles de calcular. En particular, si f es función de la nota anterior y nos acercamos al origen por los ejes coordenados, observamos que $f(x,0) = 1$ y $f(0,y) = 0$, por lo tanto no existe el límite

Ejemplo 4. Sea

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

veremos que no existe el $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. En efecto, el dominio de f es $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Si tomamos la recta $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $-1 \leq t < 0$, $f(\mathbf{r}(t)) \equiv 0$ y por lo tanto, $\lim\limits_{t \to 0} f(\mathbf{r}(t)) = 0$. Si ahora tomamos la recta $\boldsymbol{\rho}(t) = (t,t)$, $-1 \leq t <$

0, $f(\boldsymbol{\rho}(t)) \equiv \frac{1}{2}$ y entonces el $\lim\limits_{t\to 0} f(\boldsymbol{\rho}(t)) = \frac{1}{2}$, pero de acuerdo a la proposición anterior, si el $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existiera, los dos límite anteriores deberían coincidir.

Ejemplo 5. Sea
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{3\left(x^2+y^4\right)},$$
podemos ver que no existe el $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. En efecto, el dominio de f es $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ..Como en el ejemplo anterior, si nos acercamos al origen por los ejes coordenados, obtenemos límite cero. Pero ahora si tomamos la curva $\boldsymbol{\rho}(t) = \left(t^2, t\right)$, $-1 \leq t < 0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(\boldsymbol{\rho}(t)) = \frac{1}{6}$.

Ejemplo 6. Sea
$$f(x,y) = 1 - \frac{(x-1)^3 y^5}{(x-1)^4 + y^2},$$
en este caso, el dominio de f es $A = \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$. Se puede ver que si nos acercamos al punto $\mathbf{x}_0 = (1,0)$ por cualquier recta, el límite da uno. Demostraremos que el $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ dado, como
$$|f(x,y)-1| = \left|\frac{(x-1)^3 y^5}{(x-1)^4 + y^2}\right| \leq \left|\frac{(x-1)^3 y^5}{y^2}\right| = \left|(x-1)^3 y^3\right| \leq |(x-1,y)|^6$$
resulta $|f(x,y)-1| < \varepsilon$ si tomamos (x,y) tal que $|(x-1,y)| \leq \varepsilon^{\frac{1}{6}}$, o sea si elegimos $\delta \leq \varepsilon^{\frac{1}{6}}$.

Veamos ahora la noción de límite de una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$. Si indicamos con $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal sucesión, explicitamos las n componentes de $\mathbf{x}_k$ escribiendo
$$\mathbf{x}_k = (x_1^k, ..., x_n^k).$$

Definición 7. Una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ converge a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (se denota $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$) si dado un $\varepsilon > 0$ existe un entero $k(\varepsilon)$ tal que para cada $k \geq k(\varepsilon)$ se tiene que $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$

O equivalentemente, si $k \geq k(\varepsilon)$ entonces $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Análogamente a la demostración del Teorema 1 se puede probar el siguiente

Ejercicio 1. Demostrar que una sucesión $\mathbf{x}_k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ converge a $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ si y sólo si para cada j, $1 \leq j \leq n$, vale que
$$\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j.$$

Teorema 3. Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes propiedades son equivalentes *a*) C es cerrado.

b) Si $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de C convergente a un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\mathbf{x} \in C$.

Demostración. Supongamos que vale *a*). Sea $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de C convergente a un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sea A el complemento de C. Si $\mathbf{x}$ no pertenece a C, pertenece a su complemento A, que es abierto. Por lo tanto existe una bola $B(\mathbf{x}, r)$ contenida en A. En esa bola debe haber puntos de la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (pues converge a $\mathbf{x}$), pero eso es imposible porque todos los $\mathbf{x}_k$ pertenecen a C. Ahora supongamos que vale *b*), queremos probar que A es abierto. Sea $\mathbf{x}$ en A. Si A no es abierto, para cada $k \in \mathbb{N}$, $B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\right)$ no está contenida en A, por lo tanto existe $\mathbf{x}_k \in B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\right) \cap C$. Entonces esta sucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{x}$ y está contenida en C, lo que implica que $\mathbf{x} \in C$ y esto es una contradicción.

3 Continuidad

Una vez definido el concepto de límite de funciones de varias variables, el concepto de continuidad es natural

Definición 8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $F : A \to \mathbb{R}^m$ Se dice que F es *continua en un punto* $\mathbf{x}_0 \in A$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A, \ \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Se dice además que F es *continua en* A si es continua en todo punto de A.

Nota. En el caso en que $\mathbf{x}_0$ es un punto de acumulación de A, F es *continua en* $\mathbf{x}_0$ si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0).$$

- Si $\mathbf{x}_0$ es un punto aislado de A la condición de continuidad se verifica automáticamente.

Sigue del Teorema 1 que una función a valores vectoriales $F = (f_1, ..., f_m)$ es continua en un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ si y sólo si cada una de las f_i es continua en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 4. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ continuas en un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ entonces $f + g$ y fg son continuas en $\mathbf{x}_0$. También, si $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, f/g es continua en $\mathbf{x}_0$.

La demostración es totalmente análoga a la que se hace en el caso de una variable.

Con respecto a la composición tenemos el siguiente

Teorema 5. Sean $F : A \to \mathbb{R}^m$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ y sea $G : B \to \mathbb{R}^k$ con $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Supongamos que $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0) \in B$ y que G es continua en $\mathbf{y}_0$. Entonces $G \circ F : A \cap F^{-1}(B) \to \mathbb{R}^k$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Demostración. Como G es continua en $\mathbf{y}_0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in B, \ \ \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \sigma \Rightarrow \|G(\mathbf{y}) - G(\mathbf{y}_0)\| < \varepsilon.$$

También, por la continuidad de F en $\mathbf{x}_0$, para ese σ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A, \ \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| < \sigma.$$

Tomamos ahora $x \in A \cap F^{-1}(B)$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, entonces $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| = \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \sigma$. Pero como $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in B$ resulta $\|G(F(\mathbf{x})) - G(\mathbf{y}_0)\| < \varepsilon$, o sea $\|G(F(\mathbf{x})) - G(F(\mathbf{x}_0))\| < \varepsilon$. Y esa es la continuidad en $\mathbf{x}_0$ de $G \circ F$.

Para decidir la continuidad de algunas funciones es útil la siguiente

Proposición 2. Sea el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\phi : I \to \mathbb{R}$ continua en I. Sea ahora $A = I \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos $F : A \to \mathbb{R}$ por

$$F(x_1, ..., x_n) = \phi(x_1).$$

Entonces F es continua en A.

Demostración. Ejercicio.

Observamos que vale un resultado análogo, si cambiamos la primer variable por cuaquier otra. O sea si $F(x_1, ..., x_n) = \phi(x_j)$, $1 \leq j \leq n$

.

Ejemplo 7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sin x \cos y$. Escribimos $f = f_1 f_2$ donde $f_1(x, y) = \sin x$ y $f_2(x, y) = \cos y$. Ambas funciones son continuas y en virtud de la proposición 2, su producto también lo es.

Ejemplo 8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{1-y}},$$

escribimos f como la composición $f = h \circ g$ donde $g(x, y) = x\frac{1}{1-y}$ y $h(t) = e^t$. Ya sabemos que g es continua en $A = \{(x, y) : y \neq 1\}$, además h es continua en $\mathbb{R}$ luego f es continua en A.

3.1 Funciones continuas sobre conjuntos compactos

Definición 9 Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ se dice *compacto* si es cerrado, acotado y no vacío.

Teorema 6. (de Bolzano-Weierstrass). Sea $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de puntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces ella tiene una subsucesión convergente.

Esbozo de demostración. Como este resultado es conocido en el caso $n = 1$, se extrae de la sucesión de números reales formada por las primeras componentes de $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente, volvemos a $\mathbb{R}^n$ tomamos la nueva sucesión correspondiente a esos índices, extraemos de las segundas componentes una subsucesión convergente y así seguimos hasta terminar el proceso.

El siguiente teorema es un resultado importante a la hora de buscar valores máximos o mínimos de funciones reales.

Teorema 7. (de Weierstrass) Sea f una función continua definida en un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$, a valores reales. Entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre K.

Demostración. Probaremos sólo la existencia del máximo. Sea

$$s = \sup_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}).$$

En principio, s podría ser infinito. De todas formas se puede construir una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos de K tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = s.$$

Como $\mathbf{x}_k \in K$, la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, por lo tanto (Teorema 6) ella tiene una subsucesión $\left\{\mathbf{x}_{k_p}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos a $\mathbf{x}$. Como K es cerrado, el Teorema 3 asegura que $\mathbf{x} \in K$. Por la continuidad de f en $\mathbf{x}$ se tiene

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{p\to\infty} f(\mathbf{x}_{k_p}) = s.$$

La última igualdad sigue pues $f(\mathbf{x}_{k_p})$ es una subsucesión de $f(\mathbf{x}_k)$ y por lo tanto tiene el mismo límite. Se concluye que s es finito y que

$$s = \max_{\mathbf{x}\in K} f(x).$$