Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
December 19, 2012

Auxiliar #3MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. :

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

Teorema del punto fijo de Banach: Sea E un espacio de Banach, $A \subseteq E$ cerrado no vació, con E un espacio de Banach, sea $f : A \to A$ contractante i.e. $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \ \ \forall x, y \in A$$

Entonces existe un único punto fijo, es decir, $\exists! x \in A$ tal que $f(x) = x$.

P1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vació , sea $T : A \to A$ no expansiva, es decir,

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \forall x, y \in A$$

a) Sea $a \in A$ defina $T_n = \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} T \ \ \forall n \geq 1$. Muestre que para todo $n \geq 1$ T_n tiene un único punto fijo, y denote esta sucesión de puntos fijos como x_n.

b) Suponga que (x_n) tiene una subsucesión convergente, entonces pruebe que T tiene n punto fijo.

c) Considere la siguiente familia de ecuaciones

$$(n-1)\sin(x) - (nx - \pi) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

Muestre que existe una única sucesión (x_n) que resuelve dichas ecuaciones

P2. Sea $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de con coeficientes reales de $n \times m$.

a) Muestre que $\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} : x \in R^m \text{ con } x \neq 0 \right\}$ es una norma en $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$.

b) Suponga que $n = m$. Pruebe que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ para todas las matrices A y B en $R^{n \times n}$.

c) Muestre que si $A_n \to A$ y $B_n \to B$ en $(\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \| \cdot \|)$, entonces $A_n B_n \to AB$.

d) Demuestre que $e^A := \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ existe en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

P3. Sea E, F un espacios vectoriales normados, $C \subseteq E$ cerrado, considere $f : C \to F$ continua.

a) Muestre que $\forall D \subseteq F$ cerrado $\ f^{-1}(D)$ es cerrado.

b) Concluya que las curvas de nivel de una función continua con dominio cerrado son conjuntos cerrados.

c) Muestre $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \ln(1 + x^2 + y^2) = \sin(xy)\}$ es cerrado y que $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ln(\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \leq 10\}$ es abierto.

P4. Muestre que $A := \{(x_n) \in \ell^1 : \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_n \leq 1\}$ es cerrado en ℓ^1.

P5. Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio vectorial normado. Sea $A, B \subseteq E$ pruebe que:

a) $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$, $A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$

b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c) Para b) y c) muestre un ejemplo tal que la igualdad no se cumpla.

P6. Propuesto: Definición: Sea E un e.v.n, se dice que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ es absolutamente convergente si $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$ converge en $\mathbb{R}$.

Muestre que E es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente converge en E.

P7. Propuesto: Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial, la idea de este problema es demostrar la siguiente proposición.

$$\overline{B(0,1)} \text{ es compacto } \iff dim(E) < \infty$$

Para esto haga lo siguiente.

a) Suponga que $\overline{B(0,1)}$ es compacto, entonces $\exists \{x_i\}_{i=1}^n$ tales que $B(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}) \subseteq F + \frac{1}{2}B(0,1)$, donde F es el subespacio vectorial generado por $\{x_i\}_{i=1}^n$.

b) Deduzca que $B(0,1) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F + \frac{1}{2^n}B(0,1)) = \overline{F}$

Hint: Demuestre que si $A \subseteq E$ entonces $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon>0} (A + B(0,\varepsilon))$

c) Concluya.