Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
December 18, 2012

Auxiliar #2MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. : Sucesiones

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. **Definición:** Sea $C \subset E$ de un e.v. Se dice que C es convexo si y solo si

$$\forall \lambda \in [0,1]\ \forall x, y \in C\ \ \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

a) Muestre que $B(0,1)$ es un conjunto convexo.

b) Muestre que si C_1, C_2 son convexo $r \in \mathbb{R}$ entonces $C_1 + rC_2$ es convexo. Concluya que $B(x,r)$ es convexo para todo $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}_+$

c) Muestre que el conjunto $\{(x,y) \in R^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$ no es convexo. Deduzca que

$$\|(x,y)\| = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

no es una norma.

P2. Muestre que la sucesión $f_n \in C[0,1]$ definidas por

$$f_n(x) = x^n\ ,\ x \in [0,1]$$

converge puntualmente, pero no converge en $C[0,1]$. Además pruebe que f_n converge uniformemente en $C[0,\alpha]$ para todo $\alpha \in (0,1)$.

P3. Sea la sucesión de funciones decrecientes (f_n) continuas dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

Pruebe que (f_n) es de $\|\cdot\|_1$-cauchy pero no converge.
Para ello pruebe y utilice

$$\int_0^2 |f_{n+h}(x) - f_n(x)| dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1}$$

P4. **Definición:** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. E se dice un espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy converge en E.
Sea $x_n \in E$ una sucesión contractacte i.e $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\|\ \ \forall n \geq 1$$

Demuestre que:

a) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|\ \ \forall n \geq 1$.

b) Sea $p > q$ entonces $\|x_p - x_q\| \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|$. Y concluya que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

c) Concluya que si E es un espacio de Banach, entonces (x_n) converge.

d) **Teorema del punto fijo de Banach:** Sea $A \subseteq E$ cerrado no vació, con E un espacio de Banach, sea $f : A \to A$ contractante i.e. $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|\ \ \forall x, y \in A$$

Entonces existe un único punto fijo, es decir, $\exists! x \in A$ tal que $f(x) = x$.

P5. **(propuesto)** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.

a) Sea $A \subseteq E$ pruebe que

$$\overline{A} = \{x \in E : \forall \varepsilon > 0 \;\; B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in E : \exists (x_n) \subseteq A \text{ tal que} x_n \to x\}$$

b) Sea $A \subseteq E$ pruebe que

$$\overline{A} = \bigcap \{C : A \subseteq C \text{ y } C \text{ es cerrado }\}$$

c) Sea $A \subseteq E$ pruebe que

$$int(A) = \bigcup \{U : U \subseteq A \text{ y } U \text{ es abierto }\}$$

d) Sea $A \subseteq E$ pruebe que

$$int(A^c)^c = \overline{A}$$