

Auxiliar #1MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. : Espacios Métricos y Normados

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
 Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

1 Desigualdades importantes

Desigualdad de Hölder: Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Desigualdad de Minkowski: Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ $1 \leq p \leq \infty$ entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

2 Problemas

P1. Sea $C^k([0, 1], \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones derivables k -veces y con derivada continua en el intervalo $[0, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$.

a) Pruebe que las siguientes funciones son métricas en $C([0, 1], \mathbb{R})$.

- $d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$.
- $d(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $d(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} e^{-t^2} |f(t) - g(t)|$.

b) Pruebe que .

- $\|f\| = \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{x - y} + |f'(0)| + |f(0)|$ es una norma en $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.
- $\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f''(t)| + |f'(0)| + |f(0)|$ es una norma en $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

P2. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos e.v.n. Pruebe que $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$ y $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$ Son normas en $E \times F$.

P3. Ejemplos de espacios vectoriales normados:

- a) Se define $C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Pruebe que $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ es una norma sobre $C[a, b]$.
- b) Sea $1 \leq p < \infty$, se define $\ell^p := \{(x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Pruebe que $\|(x_n)\| := (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ es una norma sobre ℓ^p .

- c) Se define $B_a^b(f) := \sup_{(x_i) \in \mathcal{P}[a,b]} \left\{ \sum_{i \geq 0} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right\}$, como la variación total de una función, se dice que una función es de variación acotada si $B_a^b(f) < \infty$ y denotemos por:

$$BV[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : B_a^b(f) < \infty \text{ y } f(a) = 0\}$$

Pruebe que B_a^b es una norma en $BV[a, b]$.

P4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.

- Sea $\ell : E \rightarrow E$ una función lineal inyectiva. Pruebe que $\|\cdot\|_1$ definida por $\|x\|_1 = \|\ell(x)\|$ es una norma sobre E .
- Pruebe que $\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{4x_1^2 + 9x_2^2}$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.