Análisis Real: Primer Curso

Ricardo A. Sáenz

Índice general

Introducción v

Capítulo 1. Espacios Métricos 1

§1. Métricas 1

§2. Métricas en espacios vectoriales 4

§3. Topología 9

Ejercicios 16

Capítulo 2. Sucesiones y convergencia 21

§1. Definiciones 21

§2. Sucesiones de Cauchy y completitud 25

§3. Espacios vectoriales completos 29

§4. Convergencia de series 35

§5. La completitud de un espacio métrico 37

Ejercicios 40

Capítulo 3. Espacios compactos 43

§1. Cubiertas 43

§2. Compacidad 45

§3. El teorema de Bolzano-Weierstrass 48

§4. Compacidad en espacios de Banach 52

Ejercicios 56

Capítulo 4. El espacio de funciones continuas 57

§1. Funciones continuas 57

§2. El espacio $C(X, Y)$ 65
§3. El teorema de Arzelà-Ascoli 69
§4. El teorema de Stone-Weierstrass 76
Ejercicios 84

Capítulo 5. Espacios conexos 87
§1. Conexidad 87
§2. Conexidad por trayectorias 89
§3. Componentes conexas 92
Ejercicios 93

Capítulo 6. Espacios completos 95
§1. El teorema de Cantor 95
§2. El teorema de Baire 98
§3. Consecuencias del teorema de Baire 100
Ejercicios 106

Capítulo 7. Ecuaciones diferenciales ordinarias 107
§1. Problema de Valor Inicial 107
§2. El teorema de contracción 108
§3. Existencia y unicidad de soluciones 109
Ejercicios 112

Bibliografía 113

Introducción

Estas notas presentan una introducción básica al análisis real, basada en el estudio de espacios métricos y aplicaciones. En particular, hacemos un estudio extenso de la idea de completitud en un espacio métrico.

Dos conceptos fundamentales son la base de este estudio: métrica y completitud. Una métrica es una función que establece distancias entre los objetos de un espacio. Las propiedades que definen una métrica son aquéllas que uno espera de una distancia: positividad, simetría, y la desigualdad del triángulo, la cual garantiza que la distancia entre dos puntos es menor que la suma de las distancias de éstos a otro punto en común.

Por medio de una métrica uno puede medir la "cercanía" dentro un espacio desde el punto de vista analítico, es decir, establecer cuáles son las sucesiones convergentes. Esto nos lleva de manera natural a continuidad y al estudio de la topología de un espacio.

Completitud es la propiedad que garantiza que las sucesiones cuyos términos se acercan entre sí son convergentes. En términos generales esto significa que nuestro espacio no tiene "agujeros".

En el capítulo 1 se define el concepto de métrica, y se estudia de manera básica la topología inducida por un métrica. De manera un tanto más detallada se estudian métricas inducidas por normas (magnitudes de vectores) o por productos internos.

En el capítulo 2 se estudia la convergencia de una sucesión, y se introduce la idea de completitud. Tmabién se estudian algunas aplicaciones de estas ideas a espacios vectoriales normados, como la convergencia de series, ya sea de manera absoluta o condicional. Se demuestra, por ejemplo, el teorema de

Dirichlet. Al final, demostramos que si un espacio métrico no es completo, entonces puede ser encajado un espacio métrico completo.

La idea de compacidad fue descubierta por Heine en su estudio de funciones uniformemente continuas. Compacidad también garantiza la existencia de máximos y mínimos de una función continua, por lo que su estudio es básico en análisis. En el capítulo 3 estudiamos estos conceptos en detalle, y demostraremos el teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual clasifica a los conjuntos compactos en términos de sucesiones convergentes. También demostramos el teorema de Heine-Borel, el cual implica, por ejemplo, que bolas cerradas en el espacio euclideano son compactas. Sin embargo, tal cosa no es cierta en espacios de dimensión infinita, como se establece al final del capítulo.

La colección de funcionas continuas acotadas en un espacio métrico forma en sí un espacio métrico, y tal objeto es estudiado en detalle en el capítulo 4. Por ejemplo, clasificamos los subconjuntos compactos de dicho espacio a través del teorema de Arzelà-Ascoli. También se estudian subconjuntos densos, y demostramos el teorema de Stone-Weierstrass al final del capítulo.

En el capítulo 5 se estudia la idea de conexidad y se establecen algunas aplicaciones, como el teorema del valor intermedio en la recta real y el estudio de conjuntos convexos en el espacio euclideano.

En el capítulo 6 se estudian consecuancias de completitud, como el teorema de Cantor y el teorema de Baire. Las aplicaciones de dichos teoremas van desde la incontabilidad de los números reales hasta la inexistencia de funciones continuas sólamente en los racionales.

En último capítulo aplicamos la idea de completitud al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Introducimos la condición de Lipschitz y el teorema de contracción para garantizar la existencia y unicidad de cierta clase de ecuaciones de primer orden, y su extensión a órdenes mayores.

Estas notas, aún, siguen en constante revisión.

Ricardo Alberto Sáenz Casas

Capítulo 1

Espacios Métricos

1. Métricas

A grandes rasgos, un espacio métrico es un conjunto provisto de una distancia, llamada métrica, y a partir de ésta construímos sus propiedades analíticas: límites y continuidad.

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *métrica* d en X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ con las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$, para todos $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todos $x, y, z \in X$.

Un *espacio métrico* es una pareja (X, d), donde $X \neq \emptyset$ y d es una métrica en X.

Cuando no haya confusión, nos refererimos al espacio métrico (X, d) sólo como X. Al enunciado (3) de la definición anterior se le conoce como la *desigualdad del triángulo*.

Ejemplo 1.2. Sea $X \neq \emptyset$. Definimos

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$

Es claro que (X, d) es un espacio métrico, y d es llamada la *métrica discreta*. Este ejemplo garantiza que cualquier conjunto (no vacío) puede ser dotado de una métrica.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y definimos

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

d es llamada la *métrica estándar* en $\mathbb{R}$. Excepto cuando sea indicado de otra forma, nos referiremos al espacio $\mathbb{R}$ con la métrica estándar sólo por $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4. En $\mathbb{R}^n$ definimos

$$d_E(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

d_E es llamada la *métrica euclideana*. La demostración del hecho que d_E define una métrica requiere de la desigualdad de *Cauchy-Schwartz*, la cual será demostrada en la siguiente sección.

Ejemplo 1.5. En $\mathbb{R}^n$ también podemos definir

$$d_M(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Para verificar que es una métrica, observamos primero que las propiedades (1) y (2) de métrica se satisfacen trivialmente por la definición de valor absoluto. Para verifica la desigualdad del tri'angulo, tomamos $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n), z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^n$ y suponemos que

$$|x_{i_0} - y_{i_0}| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) = |x_{i_0} - y_{i_0}| &\leq |x_{i_0} - z_{i_0}| + |z_{i_0} - y_{i_0}| \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i - z_i| + \max_{i=1,\dots,n} |z_i - y_i| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Este métrica es llamada la *métrica del máximo*.

Ejemplo 1.6. En $\mathbb{R}^n$, definimos la métrica

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

De nuevo, es fácil verificar que d_T es una métrica, la cual es llamada la *métrica del taxi* (Figura 1).

Ejemplo 1.7. En $\mathbb{R}$, definimos ahora

$$d_A(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Las propiedades (1) y (2) de la definición de métrica se satisfacen trivialmente por la definición de valor absoluto. Para verificar la desigualdad del triángulo, sean $A = |x-z|, B = |z-y|$, y $C = |x-y|$. Entonces queremos mostrar que

$$\frac{C}{1+C} \leq \frac{A}{1+A} + \frac{B}{1+B}.$$

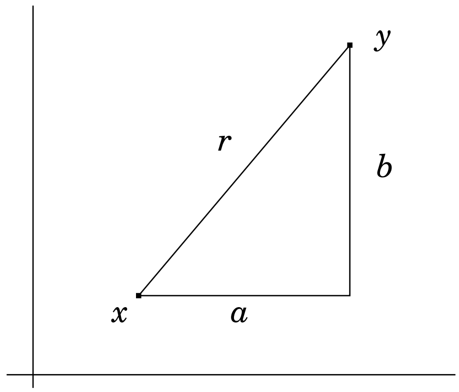

Figura 1. Comparación de las métricas d_E, d_M y d_T en $\mathbb{R}^2$. En la figura, $d_E(x, y) = r$, $d_M(x, y) = b$ (suponiendo que $b > a$) y $d_T(x, y) = a + b$.

Pero, como $C \leq A + B$ y $A, B \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{C}{1+C} &\leq \frac{C+AB}{1+C} = 1 - \frac{1-AB}{1+C}\\ &\leq 1 - \frac{1-AB}{1+A+B+AB} = \frac{A}{1+A} + \frac{B}{1+B}.\end{aligned}$$

d_A es llamada la *métrica acotada* en $\mathbb{R}$, ya que para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d_A(x, y) < 1.$$

Ejemplo 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Al igual que en el ejemplo anterior, podemos verificar que

$$d_A(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X,$$

es una métrica en X. A d_A le llamaremos la *acotación* de la métrica d en X, ya que, como veremos más adelante, induce la misma topología que d en X y además $d_A(x, y) < 1$ para todos los puntos x y y en X.

Ejemplo 1.9. Sea (X, d) un espacio métrico, y $Y \subset X$ no vacío. Entonces la restricción de d a $Y \times Y$ define una métrica en Y, y $(Y, d|_{Y \times Y})$ es llamado un *subespacio* de X. El estudio de los subespacios de un espacio métrico es importante para entender la estructura del espacio original, y será uno de los temas centrales en estas notas.

Ejemplo 1.10. Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Entonces, si definimos la función $d \times \rho : X \times Y \to [0, \infty)$ como

$$d \times \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2), \quad x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y,$$

$(X \times Y, d \times \rho)$ es un espacio métrico, y es llamado el *espacio producto* de X y Y. Por ejemplo, la métrica d_T en $\mathbb{R}^2$ es igual a la métrica producto $d \times d$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donde d es la métrica estándar.

2. Métricas en espacios vectoriales

En esta sección describimos la construcción de métricas en espacios vectoriales. En espacios normados, la métrica es dada simplemente por la distancia entre dos vectores, es decir, la norma de su diferencia. En caso de tener un producto interno, la norma es inducida por éste.

2.1. Espacios Normados.

Definición 1.11. Sea X un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, el cual puede ser el campo de los números reales ($\mathbb{R}$) o los números complejos ($\mathbb{C}$). Una *norma* en X es una función $||\cdot|| : X \to [0,\infty)$ que satisface:

1. $||x|| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todos $x, y \in X$.

Un *espacio vectorial normado* es una pareja $(X, ||\cdot||)$ donde X es un espacio vectorial y $||\cdot||$ es una norma.

Ejemplo 1.12. Consideremos el espacio $\mathbb{K}^n$ con la norma

$$||x||_E = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \tag{1.1}$$

donde $|r|$ representa el valor absoluto de r. El hecho que (1.1) define una norma se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, demostrada más adelante en esta sección. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, denominamos a este espacio el *espacio euclideano*, y, a su vez, $||\cdot||_E$ la *norma euclideana*. La norma $||\cdot||_E$ se denotará también como $|\cdot|$, cuando esto no genere confusión con el valor absoluto.

Ejemplo 1.13. Consideremos nuevamente $\mathbb{K}^n$, con la normas

$$||x||_T = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|; \tag{1.2}$$

$$||x||_M = \max_i |x_i|. \tag{1.3}$$

El hecho que estas dos funciones definen normas en $\mathbb{K}^n$ se concluye fácilmente de las propiedades básicas del valor absoluto. En el caso $n = 1$, estas dos normas y la del ejemplo anterior coinciden con la función valor absoluto.

Ejemplo 1.14. Sea $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas (con valores en $\mathbb{K}$) sobre el intervalo $[0,1]$. Entonces $C([0,1])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y se puede normar por medio de

$$||f||_u = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|. \tag{1.4}$$

(1.4) está bien definida porque f es continua en el intervalo cerrado $[0,1]$, y por lo tanto toma su máximo. La propiedad (1) de la definición de norma se satisface trivialmente, y (2) se sigue porque $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$ para todo

$x \in [0,1]$. Para verificar la desigualdad del triángulo, sean f, g continuas en $[0,1]$ y x_0 tal que

$$|f(x_0) + g(x_0)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} ||f+g||_u &= |f(x_0) + g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)| = ||f||_u + ||g||_u. \end{aligned}$$

La norma (1.4) es llamada la *norma uniforme*.

Ejemplo 1.15. En $C([0,1])$, también podemos definir la norma

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \tag{1.5}$$

donde $\int$ denota la integral de Riemann. El hecho de que (1.5) denota una norma se sigue de las propiedades usuales de la integral de Riemann y de valor absoluto. Esta norma es llamada la norma L^1.

Todo espacio vectorial normado se puede metrizar por medio de la función

$$d(x,y) = ||x - y||. \tag{1.6}$$

Es fácil demostrar que (1.6) define una métrica (ejercicio 4), y decimos que esta métrica es *inducida* por $||\cdot||$. Más aún, esta métrica satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x+z, y+z) = d(x,y)$, para todo $x, y, z \in X$; es decir, d es invariante bajo traslaciones.
2. $d(\delta x, \delta y) = \delta d(x,y)$, para todo $\delta > 0$ y $x, y \in X$; es decir, d es homogénea de orden 1[1].

Las métricas d_E, d_M y d_T en $\mathbb{R}^n$ son inducidas por las normas $||\cdot||_E$, $||\cdot||_M$ y $||\cdot||_T$, respectivamente. De igual forma, la norma $||\cdot||_u$ en $C([0,1])$ induce la métrica

$$d_u(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

de la cual discutiremos más adelante (capítulo 4).

[1]Una función $f : X \to Y$, donde X y Y son espacios vectoriales, es *homogénea* de orden α si, para todo $\delta > 0$, $f(\delta x) = \delta^\alpha f(x)$.

2.2. Espacios con producto interno.

Definición 1.16. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* en X es una función $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ con la siguientes propiedades:

1. $(x,x) \geq 0$ (es decir, un número real nonegativo) para todo $x \in X$, y $(x,x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
2. $(x,y) = \overline{(y,x)}$, para todos $x, y \in X$, donde $\bar{r}$ representa el conjugado del número r.
3. $(\lambda x + \eta y, z) = \lambda(x,z) + \eta(y,z)$, para todos $x, y, z \in X$ y $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$.

La pareja $(X, (\cdot,\cdot))$ es llamada un *espacio con producto interno*.

En esta definición, las propiedades (2) y (3) implican que

$$(x, \lambda y + \eta z) = \bar{\lambda}(x,y) + \bar{\eta}(x,z).$$

Así, un producto interno $(\cdot,\cdot)$ es lineal en la primer variable y "lineal conjungado" en la segunda.

Ejemplo 1.17. En $\mathbb{K}^n$, consideremos el producto

$$(z,w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \ldots + z_n\bar{w}_n. \tag{1.7}$$

Es fácil ver que (1.7) es de hecho un producto interno. De hecho, todo espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con producto interno, de dimensión $n < \infty$, es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ con el producto (1.7). La demostración de este hecho involucra el llamado *proceso de Gram-Schmidt*, que el lector puede repasar en cualquier texto elemental de álgebra lineal.

Ejemplo 1.18. En $C([0,1])$ definimos

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.8}$$

De nuevo, las propiedades de la integral de Riemann implican que (1.8) es un producto interno.

Un producto interno induce una norma. La construcción de la norma inducida es fácil, pero el demostrar que de hecho es una norma requiere de la siguiente propiedad.

Lema 1.19 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.** *Sea $(X, (\cdot,\cdot))$ un espacio con producto interno, y sean $x, y \in X$. Entonces*

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Demostración. El resultado es trivialmente cierto si x es el vector 0 (ambos lados de la desigualdad son iguales a 0, en tal caso). Supongamos entonces que $x \neq 0$ y sea $w \in X$ el vector

$$w = y - \Big(y, \frac{x}{(x,x)}\Big)x.$$

Entonces, utilizando las propiedades (1), (2) y (3) de la definición de pro-

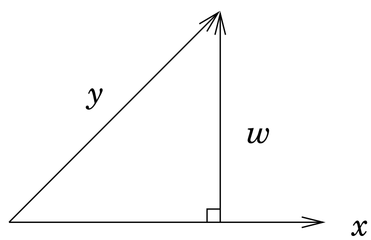

Figura 2. Los vectores x, y y w de la demostración.

ducto interno, y la nota después de la definición,

$$\begin{aligned}
0 &\leq (w,w) = \Big(y - \Big(y, \frac{x}{(x,x)}\Big)x, y - \Big(y, \frac{x}{(x,x)}\Big)x\Big) \\
&= (y,y) - \frac{\overline{(y,x)}}{(x,x)}(y,x) - \frac{(y,x)}{(x,x)}(x,y) + \frac{(y,x)}{(x,x)}\frac{\overline{(y,x)}}{(x,x)}(x,x) \\
&= (y,y) - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} \\
&= (y,y) - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} \leq (y,y),$$

y por lo tanto

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

$\square$

El vector

$$\Big(y, \frac{x}{(x,x)}\Big)x$$

de la demostración es denominado *proyección orthogonal* de y sobre x (más precisamente, sobre el espacio generado por x) y suele denotarse por $\operatorname{Proy}_x y$. Esto se debe al hecho que $w = y - \operatorname{Proy}_x y$ y x son *ortogonales*, es decir, $(w,x) = 0$, como es muy fácil de verificar.

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 1.20. *Sea* $(X, (\cdot, \cdot))$ *un espacio con producto interno, y definimos* $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ *como la función*

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1.9}$$

Entonces $(X, ||\cdot||)$ *es un espacio normado.*

Demostración. Primero, la función (1.9) está bien definida ya que para todo $x \in X$, $(x, x) \geq 0$. Verificamos que se cumplen las propiedades 1, 2 y 3 de una norma:

1. Como $(x, x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$, entonces $||x|| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
2. Si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
$$||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x, x)} = |\lambda|\sqrt{(x, x)}.$$
3. Si $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
||x + y||^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\
&= ||x||^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} + ||y||^2 \\
&= ||x||^2 + 2\Re(x, y) + ||y||^2 \\
&\leq ||x||^2 + 2|(x, y)| + ||y||^2 \\
&\leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 \quad \text{por Cauchy-Schwartz} \\
&= (||x|| + ||y||)^2.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.21. Observemos que la norma (1.1) es inducida por el producto interno (1.7) y esta norma, a su vez, induce la métrica euclideana en $\mathbb{K}^n$

$$d_E(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \ldots |x_n - y_n|^n}, \tag{1.10}$$

presentada ya en la sección anterior. El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es un ejemplo básico de un espacio métrico, y comparte muchas de sus propiedades con espacios métricos más generales. Sin embargo, hay también algunas diferencias, muy importantes, que estudiaremos más adelante.

Ejemplo 1.22. En $C([0, 1])$, el producto (1.8) induce la norma

$$||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \tag{1.11}$$

llamada la norma L^2 de $C([0, 1])$.

3. Topología

Una topología en un conjunto no vacío X es una selección de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, con propiedades tales que permiten generalizar algunas nociones analíticas de los números reales, como límites y continuidad. En esta sección definiremos la topología de un espacio métrico y demostraremos las propiedades elementales de dicha topología.

3.1. Conjuntos abiertos.

Definición 1.23. Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. La *bola abierta de radio* $\varepsilon > 0$ *con centro en* x_0 (ó *alrededor de* x_0) es el conjunto

$$B_\varepsilon(x_0) = \{y \in X : d(x_0, y) < \varepsilon\}.$$

Es decir, un bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de un punto es el conjunto de puntos en el espacio métrico a distancia menor que ε a dicho punto. Las bolas abiertas, desde luego, dependen de la métrica. Por ejemplo, la figura 3 compara las bolas abiertas en distintas métricas en el plano cartesiano.

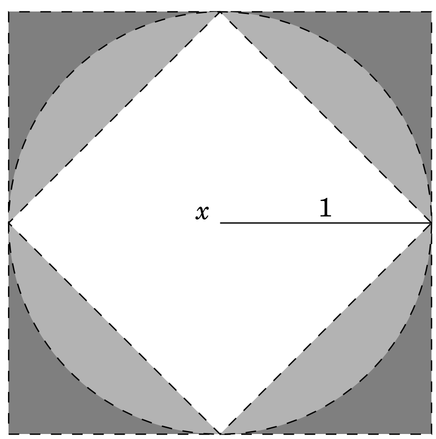

Figura 3. Comparación de la bola de radio 1 en $\mathbb{R}^2$ con respecto a las métricas d_E (círculo), d_M (cuadrado exterior) y d_T (rombo interior).

Observaciones. Sea $x \in X$. Entonces:

- $x \in B_\varepsilon(x)$, por lo que $B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X, \varepsilon > 0$.
- Si $\varepsilon \leq \delta$, entonces $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$.
- $\{x\} = \bigcap_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} B_{1/n}(x)$.
- $X = \bigcup_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} B_n(x)$.

Las bolas abiertas son el ingrediente para definir un conjunto abierto.

Definición 1.24. Si $U \subset X$, decimos que U es *abierto* si para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$.

En otras palabras, todos los elementos de un conjunto abierto son el centro de una bola abierta completamente contenida en el conjunto. Primero demostraremos que todas las bolas abiertas son de hecho conjuntos abiertos.

Proposición 1.25. *Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces el conjunto $B_\varepsilon(x)$ es abierto.*

Demostración. Sea $y \in B_\varepsilon(x)$. Tenemos que mostrar que existe una bola, con centro en y, contenida en $B_\varepsilon(x)$. Sea $\delta = \varepsilon - d(x, y)$. Este número es positivo porque $d(x, y) < \varepsilon$. Entonces, si $z \in B_\delta(y)$, $d(y, z) < \delta$ y, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon.$$

Por lo tanto $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$. ☐

Ejemplo 1.26. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, un conjunto $U \subset \mathbb{R}$ es abierto si, y sólo si, para cada $x \in U$ existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a x y contenido en U. Esto se debe a que

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon); \text{ y}$$
$$(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

De hecho, es posible dar una caracterización de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ como uniones de intervalos abiertos (véase el ejercicio 7).

Ejemplo 1.27. La intersección infinita de conjuntos abiertos, en general, no es abierta. Considere, por ejemplo, los conjuntos $U_n = (-1/n, 1/n) \subset \mathbb{R}$, $n > 0$. Éstos son abiertos, pero la intersección de ellos, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} U_n = \{0\}$, no es abierta.

Ejemplo 1.28. Recordemos la métrica en $\mathbb{R}$ dada por

$$d_A(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

La función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$f(r) = \frac{r}{1 + r},$$

es continua y estrictamente creciente. Con estas propiedades, es posible demostrar que $U \subset \mathbb{R}$ es abierto *en* $(\mathbb{R}, d_A)$ si, y sólo si, es abierto *en* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Decimos entonces que las métricas $|\cdot|$ y d_A son *equivalentes*, y los espacios $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $(\mathbb{R}, d_A)$ son *homeomorfos*. (Véase el ejercicio 14.)

Ejemplo 1.29. Considere el espacio $C = C([0, 1])$ con la norma uniforme. Entonces, si $f \in C$ tenemos

$$B_\varepsilon(f) = \{g \in C : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [0, 1]\},$$

es decir, la bola de radio ε con centro en f es el conjunto de todas las funciones continuas en $[0,1]$ cuya gráfica se encuentra a "distancia" menor que ε de la gráfica de f. (Figura 4.)

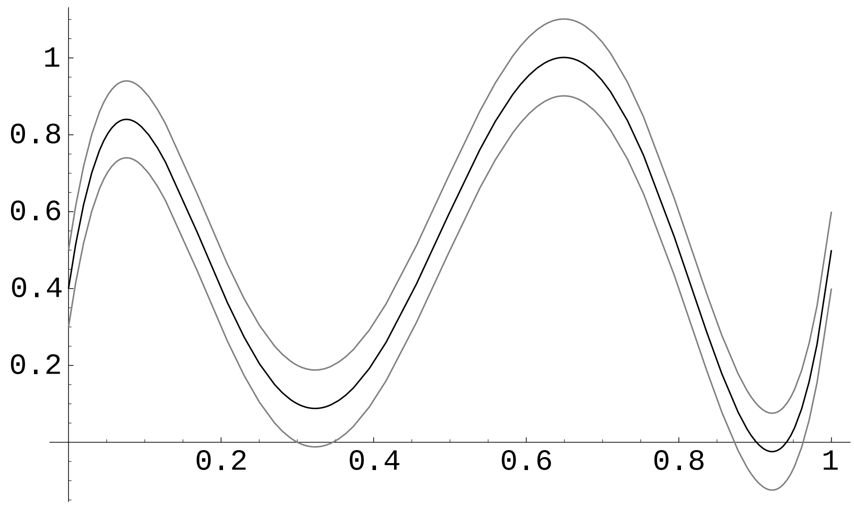

Figura 4. Bola de radio ε alrededor de una función en C.

Es muy importante observar que, al igual que las bolas abiertas, los conjuntos abiertos dependen de la métrica. Un mismo conjunto con distintas métricas, en general, tendrá distintos conjuntos abiertos.

A la colección de conjuntos abiertos en (X,d) se le llama una *topología.* Las siguientes son las propiedades fundamentales de una topología.

Proposición 1.30. *Sea (X,d) un espacio métrico.*

1. *X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos.*
2. *Si $\{U_\alpha\}$ en una colección arbitraria de conjuntos abiertos*[2]*, entonces la unión de estos conjuntos, $\bigcup_\alpha U_\alpha$, es un conjunto abierto.*
3. *Si $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son abiertos, entonces $\bigcap_i U_i$ es abierto.*

Demostración.

1. Si $x \in X$, entonces $B_1(x) \subset X$, por definición. Ahora bien, la proposición "$x \in \emptyset \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \emptyset)$" es verdadera porque el antecedente "$x \in \emptyset$" es falso. Por lo tanto, X y $\emptyset$ son abiertos.
2. Si $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$, entonces existe un α_0 tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} es abierto, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$. Entonces, $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.

[2]Se asume que α pertenece a cierto conjunto de índices

3. Si $x \in \bigcap_i U_i$, entonces $x \in U_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Como cada uno de los conjuntos U_i es abierto, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (positivos) tales que $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, para cada i. Si tomamos $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$, entonces $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ para cada i, y por lo tanto $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_i U_i$.

$\square$

Si $(Y, d_{Y\times Y})$ es un subespacio del espacio métrico (X, d), entonces un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, existe un conjunto abierto $\tilde{U}$ en X tal que $U = \tilde{U} \cap Y$ (ejercicio 22). Para ver ésto, observemos que cada bola en Y, $B_\varepsilon^Y(y)$, $y \in Y$, es la intersección de Y con una bola en X: $B_\varepsilon^Y(y) = B_\varepsilon(y) \cap Y$. Ésto es claro a partir de la definición de bola abierta en Y:

$$B_\varepsilon^Y(y) = \{x \in Y : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

3.2. Conjuntos cerrados.

Definición 1.31. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un *punto de acumulación* (o *punto límite*) de A, si para todo $\varepsilon > 0$ la bola $B_\varepsilon(x_0)$ contiene puntos de A distintos de x_0, es decir

$$B_\varepsilon(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Si $x_0 \in A$ y no es un punto de acumulación de A, entonces decimos que x_0 es un *punto aislado* de A.

De forma equivalente, $x_0 \in X$ es un punto de acumulación de A si, para todo conjunto abierto U que contiene a x_0 contiene puntos de A distintos de x_0.

Ejemplo 1.32. Los puntos 0 y 1 son puntos de acumulación del intervalo $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.33. El conjunto $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{R}$, está compuesto sólo de puntos aislados.

Definición 1.34. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto E de X es *cerrado* si contiene todos sus puntos de acumulación.

Esta definición es equivalente a decir que un conjunto E es cerrado si, y sólo si, para cada $x \notin E$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap E = \emptyset$, ya que x no es un punto de acumulación. En particular, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.35. *Sea (x, d) un espacio métrico. Un subconjunto E de X es* cerrado *si su complemento $X \setminus E$ es abierto.*

Demostración. Si E es cerrado y $x \notin E$, entonces $X \setminus E$ es abierto, por la observación anterior.

De manera inversa, si $X \setminus E$ es abierto y $x \notin E$, entonces $X \setminus E$ es un abierto que contiene a x y no interseca a E, por lo que x no es punto de acumulación. $\square$

Ejemplo 1.36. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, los intervalos cerrados $[a, b]$ son cerrados.

Ejemplo 1.37. En todo espacio métrico, cada conjunto con un solo punto, digamos $\{x_0\}$, es un conjunto cerrado. Ésto es porque, si $x \notin \{x_0\}$, entonces $x \neq x_0$ y $r = d(x, x_0) > 0$, y luego

$$B_{r/2}(x) \cap \{x_0\} = \emptyset.$$

Ejemplo 1.38. La bola cerrada, de radio $\varepsilon > 0$ con centro en x, se define como el conjunto

$$\bar{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

La bola $\bar{B}_\varepsilon(x)$ es un conjunto cerrado, ya que, si $y \notin \bar{B}_\varepsilon(x)$, entonces $d(x, y) > \varepsilon$, y, por lo tanto, si $\delta = d(x, y) - \varepsilon$, tenemos que $d(y, z) < \delta$ implica que

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > d(x, y) - \delta = d(x, y) - (d(x, y) - \varepsilon) = \varepsilon,$$

y luego $B_\delta(y) \cap \bar{B}_\varepsilon(x) = \emptyset$. (Véase el ejercicio 21.)

Los conjuntos cerrados, análogamente a los abiertos, satisfacen las siguientes propiedades, las cuales se siguen fácilmente de la proposición 1.30 y las leyes de DeMorgan.

Proposición 1.39. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*

1. *X y $\emptyset$ son cerrados;*
2. *Si $\{E_\alpha\}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_\alpha E_\alpha$ es cerrado;*
3. *Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son cerrados, entonces $\bigcup_i E_i$ es cerrado.*

Ejemplo 1.40. Cada conjunto finito es cerrado en un espacio métrico.

Ejemplo 1.41. Considere los subconjuntos de $\mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1], \\
C_1 &= \Big[0, \frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3}, 1\Big], \\
C_2 &= \Big[0, \frac{1}{3^2}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\Big] \cup \Big[\frac{8}{3^2}, 1\Big], \\
&\vdots \\
C_n &= \Big[0, \frac{1}{3^n}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\Big] \cup \ldots \cup \Big[\frac{3^{n-1} - 1}{3^{n-1}}, \frac{3^n - 2}{3^n}\Big] \cup \Big[\frac{3^n - 1}{3^n}, 1\Big], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ésto es, cada C_n se obtiene al remover el intervalo que corresponde a la tercera parte central de cada uno de los intervalos de C_{n-1}. El conjunto

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

es llamado el *conjunto de Cantor*. Es claro que C no es vacío, ya que al menos $\{0,1\} \subset C$, y de hecho C es infinito, ya que contiene los límites de cada uno de los intervalos de cada C_n. Por la proposición 1.39, C es cerrado.

Definición 1.42. Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subset X$. Definimos la cerradura de A como la unión de A y sus puntos de acumulación.

La siguientes propiedades de la cerradura son fáciles de verificar, y su demostración se deja para el lector.

Proposición 1.43. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Entonces:*

1. *$\bar{A}$ es cerrado.*
2. *$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.*
3. *Si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
4. *Si $A \subset E$ y E es cerrado, entonces $\bar{A} \subset E$.*

Demostración.

1. Sea x un punto de acumulación de $\bar{A}$. Demostraremos que x es un punto de acumulación de A, y por lo tanto está en $\bar{A}$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $y \in B_\varepsilon(x) \cap \bar{A} \setminus \{x\}$. Si $y \in A$, ya hemos terminado. Si no, entonces y es un punto de acumulación de A, y si tomamos $\delta = \min\{\varepsilon - d(x,y), d(x,y)\}$, entonces $\delta > 0$ y existe $z \in B_\delta(y) \cap A \setminus \{x,y\}$. Ahora bien,

   $$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon - d(x,y) + d(y,x) = \varepsilon,$$

   por lo que $z \in B_\varepsilon(x) \cap A \setminus \{x\}$.
2. Esto es obvio porque $\bar{A}$ es cerrado, y por lo tanto contiene todos sus puntos de acumulación.
3. Si x es un punto de acumulación de A, entonces también lo es de B. Así que $x \in \bar{A}$ implica $x \in \bar{B}$.
4. Igual que en el inciso anterior, si x es un punto de acumulación de A, entonces también lo es de E. Como E es cerrado, $x \in E$. Por lo tanto $\bar{A} \subset E$.

□

El último inciso en la proposición anterior implica que $\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

Ejemplo 1.44. Los puntos de acumulación del intervalo $(0,1)$ en $\mathbb{R}$ son todos sus puntos, además de 0 y 1. Entonces $\overline{(0,1)} = [0,1]$.

Ejemplo 1.45. Si $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, entonces $\bar{A} = [0,1]$. Esto se debe a que cualquier intervalo abierto contiene números racionales.

Si A y B son subconjuntos del espacio métrico (X,d), definimos la *distancia* entre ellos como

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Si A contiene un solo punto, digamos $A = \{x\}$, entonces escribimos $d(x,B)$. La siguiente observación nos será de utilidad más adelante.

Proposición 1.46. *Sea E un conjunto cerrado en el espacio métrico (X,d) y $x \notin E$. Entonces la distancia de x a E es positiva, es decir, $d(x,E) > 0$.*

Demostración. Como $x \notin E$, la observación que sigue a la definición de conjunto cerrado implica que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap E = \emptyset$, por lo que $d(x,y) \geq \varepsilon$ para todo $y \in E$. Entonces $d(x,E) \geq \varepsilon > 0$. □

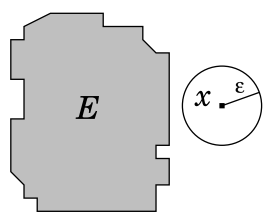

Figura 5. En la figura, la distancia de x a E es positiva, y $d(x,E) \geq \varepsilon$.

Sin embargo, si E y F son dos conjuntos cerrados disjuntos, es posible que $d(E,F) = 0$ (ejercicio 16).

3.3. Conjuntos densos.

Definición 1.47. Sea X un espacio métrico y $S \subset X$. Decimos que S *es denso en* X (o simplemente *denso*) si para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ $B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.48. X es denso en sí mismo.

Ejemplo 1.49. $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.50. $\mathbb{Q}^n$, el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ con coordenadas racionales, es denso en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$: Para ver esto, sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Si $\delta = \varepsilon/\sqrt{n}$, entonces el paralelepípedo

$$(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \cdots \times (x_n - \delta, x_n + \delta)$$

está contenido en $B_\varepsilon(x)$ (con respecto a la métrica euclideana). Si tomamos racionales $q_i \in (x_i - \delta, x_i + \delta)$, entonces $q = (q_1, \dots, q_n) \in B_\varepsilon(x)$.

De igual forma, si $A, S \subset X$, decimos que S es denso en A si para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in A$ $B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$. La siguiente proposición establece algunas propiedades de densidad.

Proposición 1.51. *Sea X un espacio métrico, $S, A \subset X$.*

1. *S es denso en A si, y sólo si, $\bar{S} \supset A$.*
2. *S es denso si, y sólo si, $\bar{S} = X$.*
3. *S es denso si, y sólo si, cualquier conjunto abierto U en X contiene puntos en S.*
4. *Si S es denso en A y es cerrado, entonces $S \supset A$.*

Dejamos la demostración de esta proposición como ejercicio.

Definición 1.52. Decimos que X es *separable* si existe un conjunto contable S denso en X

Ejemplo 1.53. El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es separable.

Ejemplo 1.54. $C([0,1])$ con la norma uniforme es separable: Este hecho es consecuencia del teorema de Weierstrass, el cual se discutirá más adelante.

Ejercicios

1. Demuestre que la función d_∞, definida en el ejemplo 4 de la sección 2.1, es una métrica en $\mathbb{R}^n$.
2. Demuestre que la función d_1, definida en el ejemplo 5 de la sección 2.1, es una métrica en $\mathbb{R}^n$.
3. Sea (X, d) un espacio métrico. Muestre que la función
$$d_A(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \quad x, y \in X,$$
define una métrica en X.
4. Muestre que, si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado, y, si definimos la función $d : X \times X \to [0, \infty)$ por
$$d(x,y) = ||x - y||,$$
entonces (X, d) es un espacio métrico.
5. Demuestre las observaciones establecidas después de la definición de la bola abierta:
   - Si $\varepsilon \leq \delta$, entonces $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$.
   - $\{x\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} B_{1/n}(x)$.
   - $X = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} B_n(x)$.

6. Dé un ejemplo donde $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$ y $\varepsilon > \delta$.
7. Si $U \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto, muestre que podemos expresar U como
$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$
donde los intervalos (a_i, b_i) son disjuntos. Es decir, todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es la unión contable de intervalos abiertos disjuntos.
8. Muestre que, si X es un espacio discreto, entonces todos sus subconjuntos son abiertos.
9. Considere los espacios vectoriales normados $(X, ||\cdot||_1)$ y $(X, ||\cdot||_2)$. Decimos que las métricas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son *equivalentes*, si existen constantes c_1 y c_2 tales que
$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1,$$
para todo $x \in X$.
   - Muestre que, si $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes y $B^i_\varepsilon(x)$ es la bola de radio ε con centro en x que corresponde a la métrica $||\cdot||_i$, $i = 1, 2$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que
   $$B^1_{\delta_1}(x) \subset B^2_\varepsilon(x) \quad \text{y} \quad B^2_{\delta_2}(x) \subset B^1_\varepsilon(x).$$
   - Utilice el inciso anterior para mostrar que normas equivalentes inducen topologías equivalentes, es decir, U es abierto en $(X, ||\cdot||_1)$ si, y sólo si, es abierto en $(X, ||\cdot||_2)$. (Decimos entonces que los espacios son *homeomorfos*.)
   - Demuestre que las normas $||\cdot||_E$, $||\cdot||_M$ y $||\cdot||_T$ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes. (De hecho, más adelante demostraremos que cualquiera dos normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.)
10. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. Si $A \subset X$, $x \in X$ y $\lambda \in K$, definimos los conjuntos $x + A$ y λA como
$$x + A = \{x + y \in X : y \in A\}, \quad \lambda A = \{\lambda y \in X : y \in A\}.$$
Muestre que, para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$,
$$B_\varepsilon(x) = x + \varepsilon B_1(0).$$
11. Sean $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ dos normas en X, y $B^i_1(0)$ la bola de radio 1 con centro en 0, bajo la norma $||\cdot||_i$. Suponga que existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que
$$B^1_\delta(0) \subset B^2_1(0) \text{ y } B^2_\varepsilon(0) \subset B^1_1(0).$$
Muestre que las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes.
12. Sean $(\cdot,\cdot)_1$ y $(\cdot,\cdot)_2$ dos productos internos en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ inducidas por $(\cdot,\cdot)_1$ y $(\cdot,\cdot)_2$, respectivamente, son equivalentes.

13. Muestre que las normas uniforme, L^1 y L^2 en $C([0,1])$ satisfacen
$$||f||_1 \leq ||f||_2 \leq ||f||_u$$
para toda $f \in C([0,1])$. Muestre, sin embargo, que ningunas dos de estas normas son equivalentes.
14. Sea (X,d) un espacio métrico, y sea d_A la acotación de d definida en el ejercicio 3. Demuestre que (X,d) y (X,d_A) son homeomorfos.
15. Demuestre la proposición 1.39.
16. Sea $(X,d) = (\mathbb{R}^2, d_E)$, el plano con la métrica euclideana.
    - Muestre que el conjunto
    $$\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\},$$
    el eje de las xs, es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$.
    - En general, muestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces su gráfica
    $$\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$
    es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$.
    - Sean $E = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $F = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, donde
    $$f(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$
    Entonces E y F son cerrados en $\mathbb{R}^2$ y $d(E,F) = 0$.
17. Sean $A, B \subset X$. Averigue la veracidad de los siguientes enunciados:
    - $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$;
    - $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$;
    - $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
    - $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$;
18. Demuestre que el conjunto de Cantor no tiene puntos aislados.
19. Muestre que si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces $\bar{A}$ es la unión de A y sus puntos de acumulación.
20. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Muestre que $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \notin \emptyset$.
21. Sea $\bar{B}_\varepsilon(x)$ la bola cerrada con centro en x y $\overline{B_\varepsilon(x)}$ la cerradura de la bola abierta $B_\varepsilon(x)$. Muestre que $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \bar{B}_\varepsilon(x)$, y dé un ejemplo donde $\bar{B}_\varepsilon(x) \not\subset \overline{B_\varepsilon(x)}$.
22. Sea $(Y, d|_{Y\times Y})$ un subespacio de (X,d). Muestre que $U \subset Y$ es abierto en Y si, y sólo si, existe un abierto $\tilde{U}$ en X tal que $U = \tilde{U} \cap Y$. Pruebe el resultado análogo para conjuntos cerrados en Y.

23. Sea (X, d) un espacio métrico, $Y \subset X$, y suponga que todos los puntos de Y son aislados. Entonces $(Y, d|_{Y \times Y})$ es un espacio discreto. (Es decir, $(Y, d|_{Y \times Y})$ es homeomorfo al espacio (Y, d_0), donde d_0 es la métrica discreta en Y.)
24. Demuestre la proposición 1.51.

Sucesiones y convergencia

1. Definiciones

Una de las ideas fundamentales del análisis es la de límite; en particular, el límite de una sucesión. En este capítulo estudiaremos la convergencia de sucesiones, además del concepto de completitud en espacios métricos.

Definición 2.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una *sucesión* en X es una función $f : \mathbb{Z}^+ \to X$. Si, para cada n, $f(n) = x_n$, entonces escribiremos la sucesión f como $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Decimos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ *converge* a $x \in X$, y escribimos $x_n \to x$, si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Los siguientes enunciados son equivalentes a decir que $x_n \to x$:

- Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n \geq N$, entonces $x_n \in B_\varepsilon(x)$.
- Para todo abierto U en X que contiene a x, existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$.

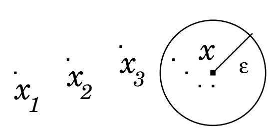

Figura 1. Ejemplo de una sucesión que converge a x. Todos los puntos x_n, excepto un número finito de ellos, están a distancia ε de x.

Ejemplo 2.2. Sea $x_0 \in X$, y considere la sucesión dada por $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces es claro que $x_n \to x_0$, ya que $d(x_n, x_0) = 0 < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. En este caso decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión constante.*

Ejemplo 2.3. Dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, si $x_n = x$, para algún $x \in X$ y para todo $n \geq N$, decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es *eventualmente constante* a x. Al igual que en el ejemplo anterior, $x_n \to x$.

Ejemplo 2.4. Considere la sucesión $x_n = 1/n$ en $\mathbb{R}$. Entonces $x_n \to 0$. Para mostrar ésto, sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad Arquimidiana de $\mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $N > 1/\varepsilon$. Entonces, si $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ejemplo 2.5. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X converge a x si, y sólo si, la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, dada por $y_n = x_n - x$, converge al vector 0. Para verificar ésto, supongamos que $x_n \to x$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $n \geq N$ implica $||x_n - x|| < \varepsilon$. Entonces $n \geq N$ implica $||y_n|| < \varepsilon$ y, por lo tanto, $y_n \to 0$. El enunciado inverso se demuestra de manera similar.

Proposición 2.6. *Si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces su límite es único; es decir, si $x_n \to x$ y $x_n \to y$, entonces $x = y$.*

Demostración. Para mostrar ésto, sea $\varepsilon > 0$, y sean N_1 y N_2 tales que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ y $d(x_m, y) < \varepsilon/2$, para $n \geq N_1$ y $m \geq N_2$. Tales N_i existen por convergencia. Ahora bien, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces

$$d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

y, como ε es arbitrario, concluímos que $d(x, y) = 0$. Por lo tanto $x = y$. $\square$

Cuando no haya motivo de confusión, escribiremos la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ simplemente como (x_n). Si $A \subset X$, decimos que (x_n) *está* en A si, para todo n, $x_n \in A$. Las siguientes preguntas aparecen de manera natural dada una sucesión (x_n) en A: Si $x_n \to x$, entonces ¿$x \in A$? ¿Bajo qué condiciones podemos garantizar que $x \in A$? ¿Podemos clasificar el conjunto de puntos x tales que existe alguna sucesión (x_n), en A, tal que $x_n \to A$?

Las respuestas a estas preguntas se pueden concluir del siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, existe (x_n) en A tal que $x_n \to x$.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión (x_n) en A tal que $x_n \to x$. Por definición, cualquier abierto que contiene a x contiene a algún elemento x_n de la sucesión (de hecho a todos excepto a lo más un número finito de ellos). Si $x \in A$, entonces $x \in \bar{A}$; y, si $x \notin A$, entonces cualquier abierto que contiene a x contiene algún punto en A distinto de x, por lo que x es un punto de acumulación de A y, por lo tanto, $x \in \bar{A}$.

De manera inversa, si $x \in \bar{A}$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Escogemos entonces, para cada n, $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$. Es fácil verificar que $x_n \to x$ (ejercicio 1). $\square$

Este teorema nos asegura que, si (x_n) está en A y $x_n \to x$, entonces x no necesariamente es un elemento de A, pero está en la cerradura de A. Además, si A es cerrado, entonces siempre $x \in A$. Si A no es cerrado, podemos encontrar puntos de acumulación de A que no estén en A, y el teorema nos permite concluir que existen sucesiones que convergen a tales puntos. Como ejemplo, consideremos la sucesión $(1/n)$. Esta sucesión está en el intervalo $(0, 1]$, pero su límite, 0, no lo está.

Si (x_n) es una sucesión, una *subsucesión* de (x_n) es una función $g : \mathbb{Z}^+ \to \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, digamos $g(k) = x_{n_k}$, tal que, si $k < l$, entonces $n_k < n_l$.

Proposición 2.8. *Si $x_n \to x$, entonces $x_{n_k} \to x$ para toda subsucesión (x_{n_k}) de (x_n).*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe N tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, x) < \varepsilon$. Entonces, como $n_k \geq k$ para todo k, si $k \geq N$ entonces $n_k \geq N$ y por lo tanto

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon.$$

$\square$

La siguiente pregunta aparece muy frecuentemente en análisis, y de hecho es clave en la solución de muchos problemas: Si (x_n) es una sucesión en A, ¿qué condiciones debe satisfacer el conjunto A para garantizar que existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x$ para algún $x \in A$? Un conjunto con tal propiedad es llamado *secuencialmente compacto*, y haremos un estudio más detallado de tales conjuntos en el siguiente capítulo. Sin embargo, podemos listar algunas propiedades, necesarias, para que un conjunto A sea secuencialmente compacto.

Como la subsucesión (x_{n_k}) también está en A, entonces, para garantizar que $x \in A$, A debe ser cerrado en X. Ahora bien, A debe ser *acotado*.

Definición 2.9. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es *acotado*, si existe $x \in X$ y $M > 0$ tales que $A \subset B_M(x)$; es decir, A está contenido en alguna bola en X.

Esta definición es equivalente a decir que A es acotado, si existen $x \in X$ y $M > 0$ tales que $d(y, x) < M$, para todo $y \in A$.

Todas las sucesiones convergentes son acotadas, es decir, si $x_n \to x$, entonces el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es acotado. De hecho, sea N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n \geq N$. Entonces, si tomamos

$$M = \max\{d(x, x_1), d(x, x_2), \ldots, d(x, x_N), 1\},$$

entonces es obvio que $d(x_n, x) \leq M$ para todo n, por lo que

$$\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset B_{M+1}(x).$$

Ahora bien, si A no es acotado, podemos construir una sucesión en A que no tiene ninguna subsucesión convergente. Para ésto, haremos uso de la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, y asumimos que A no es acotado. Entonces, para todos $M > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,*

$$B_M(x_1) \cup B_M(x_2) \cup \ldots \cup B_M(x_n) \not\supset A.$$

Demostración. Demostraremos la contrapositiva de la proposición. Supongamos que $A \subset B_M(x_1) \cup B_M(x_2) \cup \ldots \cup B_M(x_n)$. Entonces, para $x \in A$, existe i tal $x \in B_M(x_i)$. Si tomamos

$$R = \max_{i=2,\ldots,n} d(x_i, x_0) + M,$$

entonces

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_1) < M,$$

y por lo tanto $A \subset B_R(x_1)$. $\square$

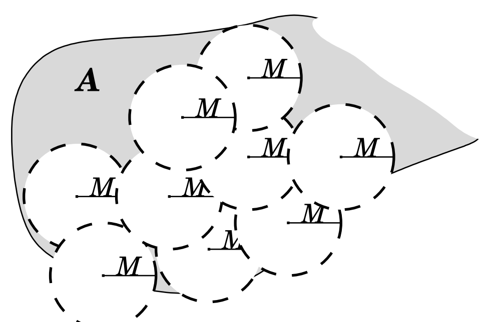

Figura 2. Si A no es acotado, entonces no puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio M.

Con esta proposición a la mano podemos construir la siguiente sucesión en A: escójase $x_1 \in A$ (es claro que $A \neq \emptyset$, ya que no es acotado) y, habiendo escogido $x_1, x_2, \ldots, x_k$, escogemos $x_{k+1} \in A \setminus \big(B_1(x_1) \cup B_1(x_2) \cup \ldots \cup B_1(x_k)\big)$. Es claro que (x_n) no puede tener ninguna subsucesión convergente, ya que $d(x_m, x_n) \geq 1$ para todos m y n, por lo que cualquiera dos puntos x_n, x_m no pueden estar a distancia menor que, digamos, $1/2$ de algún punto en común (ejercicio 2).

Estas observaciones permiten concluir que A tiene que ser cerrado y acotado para ser secuencialmente compacto. Sin embargo, estas condiciones están lejos de ser suficientes, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. Considere $(\mathbb{R}, d_A)$ donde d_A es la métrica acotada:

$$d_A(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Entonces $\mathbb{R}$ es cerrado (en sí mismo) y acotado, ya que $d_A(x,y) \leq 1$ para todo x, y, pero la sucesión $x_n = n$ no tiene ninguna subsucesión convergente, ya que, para cualquier m y n, $m \neq n$,

$$d_A(x_m, x_n) = \frac{|m-n|}{1+|m-n|} \geq \frac{1}{2},$$

donde hemos utilizado el hecho que la función $r \to \frac{r}{1+r}$ es creciente para $r > 0$. Como en la construcción anterior, x_m y x_n no pueden estar a distancia menor que $1/4$ de algún número en común.

2. Sucesiones de Cauchy y completitud

Hasta ahora, la única manera que tenemos para concluir que una sucesión converge es verificando la definición de convergencia directamente. Esto es, debemos conocer el límite *a priori*. Sin embargo, como lo hemos hecho en ocasiones anteriores, podemos concluir que una sucesión no converge (o incluso que no tiene subsucesiones convergentes), si los términos de la sucesión no se *acercan* entre sí. Esta es una condición necesaria para convergencia, y es llamada la condición de Cauchy. Sin embargo, sólo en ciertos espacios esta condición es suficiente, y dichos espacios son llamados completos. En esta sección haremos precisas las ideas de convergencia de Cauchy y completitud en un espacio métrico.

Definición 2.12. Sea (x_n) una sucesión en un espacio métrico (X, d). Decimos que (x_n) es una *sucesión de Cauchy* (o satisface la *condición de Cauchy*) si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $m, n \geq N$, entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

La siguiente proposición explora distintas relaciones entre convergencia, sucesiones de Cauchy y sucesiones acotadas.

Proposición 2.13. *Sea (X, d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión en X.*

1. *Si (x_n) converge, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy.*
2. *Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.*

3. *Si (x_n) es una sucesión de Cauchy y alguna subsucesión de (x_n) converge a x, entonces $x_n \to x$.*

Demostración. 1. Supongamos que $x_n \to x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Entonces, si $m, n \geq N$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Sea N tal que si $m, n \geq N$ entonces $d(x_m, x_n) < 1$. Si tomamos

$$M = \max\{d(x_1, x_N), d(x_2, x_N), \ldots, d(x_n, x_{N-1}), 1\},$$

entonces, para todo n, $d(x_n, x_N) \leq M$. Por lo tanto, (x_n) está en $B_M(x_N)$.

3. Supongamos que $x_{n_k} \to x$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe K tal que, si $k \geq K$, $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$. Como (x_n) es de Cauchy, existe N_1 tal que, si $m, n \geq N_1$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Si tomamos $N = \max\{n_K, N_1\}$, entonces $n \geq N$ implica

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

El primer inciso de la proposición anterior establece que ser una sucesión de Cauchy es una condición necesaria para que una sucesión sea convergente; pero esta condición no es suficiente en todo espacio métrico, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14. Considere el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, es decir, $d(r, s) = |r - s|$ para cualquiera $r, s \in \mathbb{Q}$. Considere la sucesión

$$r_1 = 1, r_2 = 1{,}4, r_3 = 1{,}41, r_4 = 1,414, \ldots.$$

En $\mathbb{R}$, dicha sucesión convergería a $\sqrt{2}$, y por lo tanto es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Obviamente también es de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, por lo que (r_n) no converge en $\mathbb{Q}$, por unicidad del límite.

Definición 2.15. El espacio métrico (X, d) es *completo*, si toda sucesión de Cauchy converge.

El ejemplo 2.14 implica que el espacio Q no es completo.

Ejemplo 2.16. $\mathbb{R}$ es completo. Este hecho se sigue del llamado axioma de completitud de los números reales:

> Sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado por arriba. Entonces S tiene un supremo.

La demostración del hecho de que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge a partir de este axioma es bosquejada en el ejercicio 4, y los detalles se dejan al lector.

Ejemplo 2.17. $\mathbb{R}^l$ es completo. Ésto se sigue de la completitud de los reales: Supongamos que $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^l)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^l$. Entonces es fácil ver que cada (x_n^i) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, converge. Si $x_n^i \to x^i$, para cada i, entonces

$$(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^l) \to (x^1, x^2, \ldots, x^l).$$

Ejemplo 2.18. Un espacio métrico discreto es completo. De hecho, toda sucesión de Cauchy en un espacio discreto es eventualmente constante, y por lo tanto converge. En particular, un espacio finito es completo.

Ejemplo 2.19. Si (X, d) es completo y E es cerrado en X, entonces el subespacio $(E, d|_{E\times E})$ es completo: si (x_n) es una sucesión de Cauchy en E, entonces también es una sucesión de Cauchy en X, y como X es completo, converge, digamos a x. Pero E es cerrado, por lo que $x \in E$. Entonces $x_n \to x$ en E.

El espacio $C([0,1])$ es completo. Estableceremos este enunciado como teorema.

Teorema 2.20. *El espacio métrico $C([0,1])$ es completo.*

Demostración. Recordemos que $C([0,1])$ es el espacio métrico de todas las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continuas, cuya métrica está dada por

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Notemos que esta métrica es inducida por la norma

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy; es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $m, n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [0,1]$. Nótese que N no depende de x. Ahora bien, si tomamos $x \in [0,1]$, la sucesión dada por $x_n = f_n(x)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que, como $\mathbb{R}$ es completo, converge, digamos a $L(x)$. Entonces L define una función en $[0,1]$, dada por

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ésto significa que, para cada $x \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe un N_x (que depende de x) tal que, si $n > N_x$, entonces $|f_n(x) - L(x)| < \varepsilon$. Decimos entonces que (f_n) *converge punto por punto* a L. Demostraremos que de hecho $f_n \to L$ en $C([0,1])$, es decir, (f_n) *converge uniformemente* a $L \in C([0,1])$. Ésto lo

haremos en dos pasos:
Paso 1: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un N tal que, si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(x) - L(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in [0,1];$$

es decir, N no depende de x.
Paso 2: L es continua en cada punto $x \in [0,1]$.

Para demostrar el paso 1, sea $\varepsilon > 0$. Tomamos N (la sucesión (f_n) es de Cauchy) tal que, si $m, n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ uniformemente. Demostraremos que, de hecho, $|f_n(x) - L(x)| < \varepsilon$, para $n \geq N$, uniformemente.

Fijamos $x_0 \in [0,1]$ y estimaremos la diferencia $|f_n(x_0) - L(x_0)|$, para $n \geq N$. Ahora bien, sabemos que la sucesión $(f_n(x_0))$ converge a $L(x_0)$, por lo que podemos encontrar un N_{x_0} tal que $|f_n(x_0) - L(x_0)| < \varepsilon/2$, para todo $n \geq N_{x_0}$. Escogemos ahora un entero n_0 con $n_0 > N$ y $n_0 > N_{x_0}$. Entonces, si $n \geq N$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x_0) - L(x_0)| &\leq |f_n(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - L(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como x_0 es arbitrario y N no depende de x_0, podemos concluir que, si $n \geq N$, $|f_n(x) - L(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [0,1]$. Entonces $f_n \to L$ uniformemente.

Para demostrar el paso 2, tomamos un $x_0 \in [0,1]$ y demostraremos que L es continua en x_0; es decir, dado $\varepsilon > 0$, mostraremos que podemos encontrar un $\delta > 0$ con la propiedad que $|x - x_0| < \delta$ implica $|L(x) - L(x_0)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por convergencia uniforme, podemos escoger un entero n_0 tal que $|f_{n_0}(x) - L(x)| < \varepsilon/3$ para cada $x \in [0,1]$. Ahora bien, como f_{n_0} es continua, existe un $\delta > 0$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$. Entonces, si $x \in [0,1]$ y $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} |L(x) - L(x_0)| &\leq |L(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - L(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Más adelante estudiaremos la continuidad de funciones en un espacio métrico y, de manera similar a $C([0,1])$, definiremos el espacio $C(X,Y)$ como el espacio de funciones continuas acotadas de X a Y. Así como lo hemos hecho para $C([0,1])$, podemos mostrar que $C(X,Y)$ es completo si Y es completo.

El siguiente teorema será de utilidad más adelante.

Teorema 2.21. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y E un subespacio de X. Entonces E es completo si y sólo si E es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que E es completo, y sea $x \in X$ un punto de acumulación de E. Entonces, existe una sucesión (x_n) en E tal que $x_n \to x$. Como (x_n) converge en X, es una sucesión de Cauchy en X. Pero la métrica de E es la restricción a E de la métrica de X, por lo que entonces (x_n) es también de Cauchy en E. Como E es completo, (x_n) converge en E. Como E es un subespacio de X, la proposición 2.6 implica que $x_n \to x$ en E, es decir, $x \in E$. Por lo tanto, E es cerrado.

Supongamos ahora que E es cerrado en X, y sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E. Como E es un subespacio de X, (x_n) es también una sucesión de Cauchy en X y, como X es completo, entonces converge, digamos a x. Pero entonces (x_n) es una sucesión en E que converge a x, lo cual implica que $x \in \bar{E}$. Como E es cerrado, $x \in E$, lo cual implica que $x_n \to x$ en E. Por lo tanto, E es completo. $\square$

3. Espacios vectoriales completos

En esta sección estudiaremos la completitud de un espacio métrico (X, d), cuando $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado y la métrica d es inducida por la norma; es decir, $d(x, y) = ||x - y||$. En este caso podemos estudiar la completitud del espacio X a través de series convergentes en X; en particular, de series absolutamente convergentes en X.

Definición 2.22. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. Una *serie* en X es la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{2.1}$$

donde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X. Decimos que la serie (2.1) es *convergente* (o que converge), si la sucesión (s_n), dada por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \tag{2.2}$$

de *sumas parciales* converge en X. Decimos que (2.1) es *absolutamente convergente* (o que converge absolutamente), si la sucesión (r_n),

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||, \tag{2.3}$$

converge en $\mathbb{R}$.

Nótese que mientras (2.2) define una sucesión de vectores, (2.3) define una sucesión de números reales nonegativos. La convergencia de cada una de éstas no necesariamente implica la convergencia de la otra.

Ejemplo 2.23. Considere la sucesión en $\mathbb{R}$
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$
La serie $\sum x_n$ converge en $\mathbb{R}$, pero no converge absolutamente, ya que la sucesión de sumas parciales
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
crece como $\log n$, por lo que diverge a ∞. Sin embargo, es conocido que si una serie en $\mathbb{R}$ es absolutamente convergente, entonces converge. Esto resulta ser equivalente a la completitud de los números reales, como lo veremos a continuación.

Definición 2.24. Si el espacio normado $(X, ||\cdot||)$ es completo, entonces decimos que X es un *espacio de Banach.*

Por ejemplo, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^l$ ó $C([0,1])$ son espacios de Banach. El siguiente teorema caracteriza a los espacios de Banach a través de sus series absolutamente convergentes.

Teorema 2.25. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. Entonces X es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie en X absolutamente convergente es convergente.*

Es decir, X es completo si, y sólo si, la sucesión (2.2) converge siempre que (2.3) converge.

Demostración. Para demostrar este teorema supongamos primero que X es un espacio de Banach; es decir, toda sucesión de Cauchy en X converge. Sea entonces $\sum x_n$ un serie absolutamente convergente; en otras palabras, suponemos que la sucesión $(\sum_1^n ||x_k||)$ converge. Demostraremos que $(\sum_1^n x_k)$ converge.

Para ésto, mostraremos que $(\sum_1^n x_k)$ es una sucesión de Cauchy. Esto será suficiente ya que, por hipótesis, X es completo. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(\sum_1^n ||x_k||)$ converge en $\mathbb{R}$, entonces es una sucesión de Cauchy. Tomemos entonces N tal que si $n, m \geq N$, entonces $\left| \sum_1^n ||x_k|| - \sum_1^m ||x_k|| \right| < \varepsilon$. Pero esto significa, si $n > m$, que
$$||x_{m+1}|| + ||x_{m+2}|| + \ldots + ||x_n|| < \varepsilon.$$
Por lo tanto, si $n, m \geq N$ y $n > m$, tenemos que
$$||\sum_1^n x_k - \sum_1^m x_k|| = ||\sum_{m+1}^n x_k|| \leq ||x_{m+1}|| + ||x_{m+2}|| + \ldots + ||x_n|| < \varepsilon,$$
por lo que la sucesión $(\sum_1^n x_k)$ es de Cauchy y, por lo tanto, converge.

Ahora mostraremos que si toda serie absolutamente convergente es convergente en X, entonces X es completo. Sea entonces (x_n) un sucesión de Cauchy. Mostraremos que esta sucesión converge. Observemos que es suficiente, por la proposicón 2.13, demostrar que alguna subsucesión de (x_n) converge.

Primero, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, sea n_k tal que, si $m, n \geq n_k$, entonces

$$||x_n - x_m|| < 2^{-k}$$

y, además, $n_{k+1} \geq n_k$. Tal sucesión es posible ya que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Definimos la sucesión

$$y_0 = x_{n_1}, \quad y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Por la construcción de las n_k, es claro que $||y_k|| < 2^{-k}$, luego

$$\sum_{k=0}^{n} ||y_k|| < ||x_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < ||x_{n_1}|| + 1$$

y, por lo tanto, la serie $\sum y_k$ es absolutamente convergente. Por hipótesis, es convergente; es decir, para algún $y \in X$,

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \to y.$$

Pero $\sum_{k=0}^{N} y_k = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{N}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{N+1}}$, por lo que concluímos que la subsucesión (x_{n_k}) converge. □

Este teorema muestra por qué en $\mathbb{R}$ toda serie absolutamente convergente es de hecho convergente, como es mostrado en los cursos elementales de cálculo. Ésto es equivalente a completitud. Más aún, este teorema nos permite desarrollar un criterio para convergencia uniforme de series de funciones en $C([0,1])$, el cual es llamado el criterio M de Weierstrass.

Corolario 2.26 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones en $C([0,1])$. Si existe una sucesión (M_n) de números nonegativos tales que $|f_n(x)| \leq M_n$, para todo x, y la serie $\sum M_n$ converge, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge absoluta y uniformemente en $[0,1]$.

Demostración. Las hipótesis se pueden reescribir de la siguiente forma:

- $||f_n||_\infty \leq M_n$, para todo n,
- $\sum M_n < \infty$; es decir, converge.

Entonces la serie $\sum ||f_n||_\infty$ converge, por lo que entonces $\sum f_n$ es una serie absolutamente convergente. Como $C([0,1])$ es completo, entonces la serie $\sum f_n$ converge en $C([0,1])$, es decir, uniformemente. $\square$

De nuevo, el criterio M de Weierstrass se puede generalizar a los espacios $C(X,Y)$, donde Y es un espacio de Banach. En este caso, $C(X,Y)$ es también un espacio de Banach. Estudiaremos estas generalizaciones más adelante en estas notas.

3.1. Equivalencia de normas en $\mathbb{R}^l$. En el ejercicio 9 del capítulo 1 definimos el concepto de normas equivalentes: Si $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son normas en X, decimos que son equivalentes si existen $c, C > 0$ tales que, para todo $x \in X$,

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1.$$

Si dos normas son equivalentes, entonces inducen métricas homeomorfas, y por lo tanto las sucesiones convergentes respecto de una son también convergentes repscto a la otra.

En el mismo ejercicio, se demuestra que las normas $||\cdot||_E$, $||\cdot||_M$ y $||\cdot||_T$ en $\mathbb{R}^l$ son equivalentes. Demostraremos ahora que cualquiera dos normas en $\mathbb{R}^l$ son equivalentes.

Teorema 2.27. *Sean $|\cdot||_1$ y $||\cdot_2||$ normas en $\mathbb{R}^l$. Entonces son equivalentes.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que, por ejemplo, $||\cdot||_1$ es la métrica *del taxi*:

$$||x||_t = |x_1| + \ldots + |x_l|.$$

Sea entonces $||\cdot||$ cualquier norma en $\mathbb{R}^l$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^l$,

$$||x|| = ||x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_l\mathbf{e}_l|| \leq |x_1| \cdot ||\mathbf{e}_1|| + \ldots + |x_l| \cdot ||\mathbf{e}_l||,$$

por las propiedades de norma, donde $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_l\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^l$. Si tomamos

$$M = \text{máx}\{||\mathbf{e}_1||, \ldots, ||\mathbf{e}_l||\},$$

entonces

$$||x|| \leq M|x_1| + \ldots M|x_l| = M||x||_t.$$

Para la inversa, demostraremos que, para cada $i = 1, \ldots, l$, existe $c_i > 0$ tal que $|x_i| \leq c_i||x||$, para todo $x \in \mathbb{R}^l$. De esa forma obtendremos que

$$||x||_t = |x_1| + \ldots + |x_l| \leq (c_1 + \ldots + c_l)||x||.$$

Esto lo demostraremos por inducción en l, la dimensión del espacio. El caso $l = 1$ es trivial, porque cualquier norma es, de hecho, un múltiplo del valor absoluto (simplemente hay que notar que, para $x \in \mathbb{R}$, $||x|| = |x| \cdot ||1||$).

Suponemos ahora que el caso $l - 1$ es cierto, y demostraremos el caso l.

Por contradicción, y sin pérdida de generalidad, suponemos que, para cada n, existe un $x^n \in \mathbb{R}^l$ tal que $|x_1^n| > n \cdot ||x^n||$. Si tomamos[1]

$$y^n = \frac{x^n}{x_1^n} = \mathbf{e}_1 + \frac{x_2^n}{x_1^n}\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{x_l^n}{x_1^n}\mathbf{e}_l,$$

entonces $y^n \to 0$ con respecto a $||\cdot||$, ya que

$$||y^n|| = \frac{1}{|x_1^n|}||x^n|| < \frac{1}{n}.$$

Sea $z^n = y^n - \mathbf{e}_1$. Luego, $z^n \to -\mathbf{e}_1$. Pero z^n se encuentra en el espacio generado por $\{\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_l\}$, llamémoslo V, isomorfo a $\mathbb{R}^{l-1}$. Como la restricción de $||\cdot||$ a V induce una norma en $\mathbb{R}^{l-1}$ (a través del isomorfismo[2]), nuestra hipótesis de inducción implica que existen constantes $c_1, \ldots, c_{l-1} > 0$ tales que

$$(2.4) \qquad |z_i| \le c_i||z_1\mathbf{e}_2 + \ldots z_{l-1}\mathbf{e}_l||, \quad z_1, \ldots, z_{l-1} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, l-1.$$

Entonces, como (z^n) converge, es una sucesión de Cauchy, y (2.4) implica que cada

$$a_i^n = \frac{x_i^n}{x_1^n}, \qquad i = 2, \ldots, l-1,$$

es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto converge, digamos, a a_i. Entonces, la desigualdad del triángulo implica que z^n converge a

$$a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_l\mathbf{e}_l.$$

Por unicidad de límites, $-\mathbf{e}_1 = a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_l\mathbf{e}_l$, lo cual contradice el hecho de que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_l\}$ es una base. Esto termina la demostración del teorema con las constantes

$$c = \frac{1}{c_1 + \ldots + c_l} \quad \text{y} \quad C = M.$$

□

Podemos generalizar este resultado a otros espacios vectoriales.

Teorema 2.28. *Sean* $(X, ||\cdot||_X)$ *y* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *dos espacios vectoriales de dimensión finita, tales que* $\dim X = \dim Y$, *y sea* $\phi : X \to Y$ *un isomorfismo. Entonces, existen constantes* $c, C > 0$ *tales que*

$$c||x||_X \le ||\phi(x)||_Y \le C||x||_X$$

para todo $x \in X$.

---

[1] Estamos escribiendo el índice n de la sucesión como superíndice, para no confundir con la coordenada.

[2] Si $\phi : V \to \mathbb{R}^{l-1}$ es un isomorphismo, la norma inducida está dada por

$$||x||_\phi = ||\phi^{-1}x||.$$

En el teorema está implícito que suponemos que X y Y son espacios vectoriales sobre el mismo campo, ya sea $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Supondremos de hecho que el campo base es $\mathbb{R}$, para hacer uso del teorema 2.27. Sin embargo, la demostración de un teorema análogo al teorema 2.27 para $\mathbb{C}^l$ se sigue de manera similar, por lo que extender estos resultados al caso complejo es fácil.

Demostración. Sea $l = \dim X$ y $\psi : \mathbb{R}^l \to X$ un isomorfismo. Definimos entonces las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ en $\mathbb{R}^l$ por

$$||x||_1 = ||\psi(x)||_X,$$
$$||x||_2 = ||\phi \circ \psi(x)||_Y.$$

Por el teorema 2.27, existen constantes $c, C > 0$ tales que

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^l$. Entonces, para $x \in X$,

$$c||x||_X = c||\psi^{-1}(x)||_1 \leq ||\psi^{-1}(x)||_2 = ||\phi \circ \psi(\psi^{-1}(x))||_Y = ||\phi(x)||_Y,$$

y

$$||\phi(x)||_Y = ||\phi \circ \psi(\psi^{-1}(x))||_Y = ||\psi^{-1}(x)||_2 \leq C||\psi^{-1}(x)||_1 = C||x||_X.$$

□

Si en el teorema 2.28 $X = Y$, y tomamos el isomorfismo ϕ como la identidad, tenemos entonces el siguiente corolario.

Corolario 2.29. *Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita, entonces cualesquiera dos normas en X son equivalentes.*

La completitud de $\mathbb{R}^l$ (ejemplo 2.17) y el teorema 2.28 implican el siguiente resultado.

Corolario 2.30. *Si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado de dimensión finita, entonces es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X, y demostraremos que converge. Si $\dim X = l$, tomamos entonces un isomorphismo $\phi : X \to \mathbb{R}^l$, y definimos $y_n = \phi(x_n)$. (y_n) es entonces una sucesión en $\mathbb{R}^l$.

Por el teorema 2.28, existen constantes $c, C > 0$ tales que

$$c||x|| \leq ||\phi(x)||_E \leq C||x||$$

para todo $x \in X$, donde $||\cdot||_E$ es la norma euclideana en $\mathbb{R}^l$. Entonces, para todo m, n,

$$||y_m - y_n||_E = ||\phi(x_m - x_n)||_E \leq C||x_m - x_n||,$$

lo cual implica que (y_n) es también de Cauchy. Como $\mathbb{R}^l$ es completo, (y_n) converge, digamos $y_n \to y$. Sea $x = \phi^{-1}(y)$. Como

$$||x_n - x|| \leq \frac{1}{c}||y_n - y||_E,$$

$x_n \to x$. □

Corolario 2.31. *Sea X un espacio de Banach y Y un subespacio de dimensión finita. Entonces Y es cerrado en X.*

Demostración. Como Y es un espacio normado de dimensión finita, es entonces completo, por el corolario 2.30. Por el teorema 2.21, Y es cerrado en X. □

4. Convergencia de series

En la sección anterior estudiamos la convergencia absoluta de una serie en un espacio normado y vimos la relación entre dicha convergencia y la completitud del espacio. En esta sección, sin embargo, estudiaremos la convergencia de una serie que no necesariamente converge de manera absoluta.

El resultado más importante en esta área es el siguiente teorema, debido a Dirichlet. Antes, definiremos una sucesión monótona.

Definición 2.32. Decimos que una sucesión (a_n) en $\mathbb{R}$ es *monótona creciente* (o *monótona decreciente*) si, para cada n, $a_{n+1} \geq a_n$ (ó $a_{n+1} \leq a_n$). Si una sucesión es monótona creciente o monótona decreciente, diremos simplemente que es *monótona.*

Teorema 2.33 (Dirichlet)**.** *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach, (λ_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ y (x_n) una sucesión en X tales que*

1. *$\lambda_n \geq 0$ para todo n;*
2. *λ_n es monótona y $\lambda_n \to 0$; y*
3. *La sucesión de sumas parciales de (x_n),*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

es acotada en X.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge.

Demostración. Demostraremos que la sucesión

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

es de Cauchy en X. Como X es completo, esto demostrará que converge.

Para esto, sean $n > m$ y escribimos

$$\begin{aligned} y_n - y_m &= \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k (s_k - s_{k-1}) \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k s_k - \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k s_{k-1} = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k s_k - \sum_{k=m}^{n-1} \lambda_{k+1} s_k \\ &= \lambda_n s_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k - \lambda_{m+1} s_m. \end{aligned}$$

Como (s_n) es acotada, existe $M > 0$ tal que $||s_n|| \leq M$ para todo n. Como (λ_n) es monónotona y converge a 0, $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$ para todo k. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lambda_n \to 0$, existe N tal que, si $n \geq N$, $\lambda_n < \varepsilon/2M$. Entonces, si $n > m \geq N$,

$$\begin{aligned} ||y_n - y_m|| &\leq \lambda_n ||s_n|| + \sum_{k=m+1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) ||s_k|| + \lambda_{m+1} ||s_m|| \\ &\leq \lambda_n M + \sum_{k=m+1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) M + \lambda_{m+1} M \\ &= \lambda_n M + (\lambda_{m+1} - \lambda_n) M + \lambda_{m+1} M = 2\lambda_{m+1} M < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.34 (Series alternantes)**.** Si $a_n > 0$ tal que (a_n) es monótona y converge a 0, entonces decimos que la serie $\sum (-1)^n a_n$ es alternante. Podemos aplicar el teorema de Dirichlet para conluír que dichas series son convergentes en $\mathbb{R}$, tomando $\lambda_n = a_n$ y $x_n = (-1)^n$.

Ejemplo 2.35. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}. \tag{2.5}$$

Supongamos que $\alpha \neq 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.[3] Si tomamos $x_n = \operatorname{sen} n\alpha$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k &= \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} (e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}) = \frac{1}{2i} \Big(e^{i\alpha} \frac{1 - e^{in\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} - e^{-i\alpha} \frac{1 - e^{-in\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}} \Big) \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} n\alpha - \operatorname{sen}(n+1)\alpha}{2(1 - \cos \alpha)}, \end{aligned}$$

la cual es acotada. Como $\dfrac{1}{n}$ es monótona y converge a cero, entonces la serie (2.5) converge.

[3] En tal caso la serie sería idénticamente cero.

5. La completitud de un espacio métrico

A todo espacio métrico (X, d), no necesariamente completo, se le puede asignar un espacio métrico completo $(\bar{X}, \bar{d})$, llamado la *completitud* de X. Considere la colección $\mathcal{X}$ de todas las sucesiones de Cauchy en (X, d). Definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

A la clase de equivalencia de (x_n) la denotaremos por $[x_n]$. La clase denotada por $[x]$ corresponderá a la clase que contiene a la sucesión constante $x_n = x$ (ésta es, trivialmente, una sucesión de Cauchy).

Es fácil ver que, si $x_n \to x$, entonces $[x_n] = [x]$.

Lema 2.36. *Si (x_n) y (y_n) son dos sucesiones de Cauchy en X, entonces la sucesión $\big(d(x_n, y_n)\big)$ converge en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Demostraremos que la sucesión $\big(d(x_n, y_n)\big)$ es de Cauchy. Primero, por la desigualdad del triángulo, para todo m, n,

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$
$$d(x_m, y_m) \le d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m),$$

lo cual implica que

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Como (x_n) y (y_n) son de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n, m \ge N$ implica que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ y $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$. Entonces, para $n, m \ge N$, tenemos

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Entonces $\big(d(x_n, y_n)\big)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto converge. □

Sea $\bar{X}$ el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación $\sim$. Definimos la función $\bar{d}$ en $\bar{X} \times \bar{X}$ como

$$\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n). \tag{2.6}$$

Teorema 2.37. *La función $\bar{d} : \bar{X} \times \bar{X} \to [0, \infty)$ dada por (2.6) define una métrica en $\bar{X}$. Además, $(\bar{X}, \bar{d})$ es completo.*

Demostración. Primero observemos que $\bar{d}$ está bien definida. Esto es, si $(x_n) \sim (u_n)$ y $(y_n) \sim (v_n)$, entonces $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(u_n, v_n)$. Este enunciado se sigue de la desigualdad

$$|d(x_n, y_n) - d(u_n, v_n)| \le d(x_n, u_n) + d(y_n, v_n)$$

y el hecho de que $d(x_n, u_n)$ y $d(y_n, v_n)$ convergen a 0.

Ahora verificamos que la función $\bar{d}$ satisface las propiedades de una métrica:

1. $\bar{d}([x_n],[y_n]) = 0$ si y sólo si $\lim d(x_n,y_n) = 0$ si y sólo si $x_n \sim y_n$ si y sólo si $[x_n] = [y_n]$.
2. $\bar{d}([x_n],[y_n]) = \lim d(x_n,y_n) = \lim d(y_n,x_n) = \bar{d}([y_n],[x_n])$.
3. $$\begin{aligned}\bar{d}([x_n],[y_n]) &= \lim d(x_n,y_n) \leq \lim(d(x_n,z_n) + d(z_n,y_n))\\ &= \lim d(x_n,z_n) + \lim d(z_n,y_n)\\ &= \bar{d}([x_n],[z_n]) + \bar{d}([z_n],[y_n]).\end{aligned}$$

Sea $[x_n^k]_k$ una sucesión de Cauchy en $(\bar{X},\bar{d})$. Entonces, existe un entero K_1 tal que si $k,l \geq K_1$ entonces $\bar{d}([x_n^k]_k,[x_n^l]_l) < 1/2$. Por la definición de $\bar{d}$, para cada $l \geq K_1$ existe un entero $N(1,l)$, el cual escogemos de tal forma que $N(1,l) \geq N(1,l-1)$, tal que $n \geq N(1,l)$ implica $d(x_n^{K_1},x_n^l) < 1/2$.

Inductivamente, escogemos enteros K_p y $N(p,l)$, $l \geq K_p$, de la manera siguiente: Una vez escogidos K_{p-1} y $N(p-1,l)$, $l \geq K_{p-1}$, escogemos $K_p \geq K_{p-1}$ tal que $k,l \geq K_p$ implica $\bar{d}([x_n^k]_k,[x_n^l]_l) < 1/(2p)$, y, para cada $l \geq K_p$, escogemos $N(p,l)$ de tal forma que

- $N(p,l) \geq N(p,l-1)$;
- $N(p,l) \geq N(p-1,l)$;
- $n \geq N(p,l)$ implica $d(x_n^{K_p},x_n^l) < 1/(2p)$; y
- $n,m \geq N(p,l)$ implica $d(x_n^l,x_m^l) < 1/(2p)$.

Tomamos entonces la sucesión $y_n = x_{N(n,K_n)}^{K_n}$.

La sucesión y_n es de Cauchy en X: Si $m > n$, tenemos que

$$\begin{aligned}d\big(x_{N(n,K_n)}^{K_n},x_{N(m,K_m)}^{K_m}\big) &\leq d\big(x_{N(n,K_n)}^{K_n},x_{N(m,K_m)}^{K_n}\big) + d\big(x_{N(m,K_m)}^{K_n},x_{N(m,K_m)}^{K_m}\big)\\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},\end{aligned}$$

ya que $N(m,K_m) \geq N(n,K_n)$.

La sucesión $[x_n^k]_k$ converge a $[y_n]$ en $\bar{X}$: Si $k \geq K_p$ y $n \geq N(p,k)$, tenemos que

$$\begin{aligned}d(x_n^k,y_n) &= d(x_n^k,x_{N(n,K_n)}^{K_n})\\ &\leq d(x_n^k,x_n^{K_p}) + d(x_n^{K_p},x_{N(p,K_p)}^{K_p})\\ &\quad + d(x_{N(p,K_p)}^{K_p},x_{N(n,K_n)}^{K_p}) + d(x_{N(n,K_n)}^{K_p},x_{N(n,K_n)}^{K_n})\\ &< \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{2}{p},\end{aligned}$$

porque $N(p,k) \geq N(p,K_p) \geq p$ y $N(n,K_n) \geq N(p,K_p)$. Por lo tanto, $\bar{d}([x_n^k]_k,[y_n]) < 2/p$ para $k \geq K_p$, y concluímos que $\bar{d}([x_n^k]_k,[y_n]) \to 0$ cuando $k \to \infty$. □

Si identificamos cada elemento de $x \in X$ con $[x]$ en $\bar{X}$, tenemos una inyección $j : X \to \bar{X}$ tal que $\bar{d}(j(x),j(y)) = d(x,y)$, es decir, que preserva la métrica. Tales funciones son llamadas *isometrías*. Si identificamos X con $j(X) \subset \bar{X}$, entonces podemos decir que X es un subespacio de algún espacio métrico completo.

Si X es completo, entonces toda clase de equivalencia en $\bar{X}$ es igual a $[x]$ para algún $x \in X$, ya que toda sucesión de Cauchy en X converge. Por lo tanto, la isomatría $j : X \to \bar{X}$ es biyectiva, y su inversa también es una isometría. Entonces, (X,d) y $(\bar{X},\bar{d})$ no sólo son homeomorfos, sino que también decimos que son *isométricos*.

Si $(X, d|_{X\times X})$ es un subespacio del espacio completo (Y,d), entonces podemos indentificar a $\bar{X}$ con algún subespacio E de Y y $(\bar{X},\bar{d})$ es isométrico a $(E, d|_{E\times E})$. De hecho, E es la cerradura de X en Y. Podemos generalizar este resultado de la siguiente manera.

Teorema 2.38. *Sea $j : X \to Y$ una isometría donde (Y,d') es un espacio completo. Entonces existe una isometría $\phi : \bar{X} \to Y$ tal que $\phi(\bar{X}) = \overline{j(X)}$.*

Demostración. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(j(x_n))$ es una sucesón de Cauchy en Y y, como Y es completo, converge. Dada $[x_n] \in \bar{X}$, definiremos entonces ϕ como

$$\phi([x_n]) = \lim_{n\to\infty} j(x_n).$$

Para verificar que ϕ está bien definida, observemos que si $[x_n] = [y_n]$, entonces $d(x_n,y_n) \to 0$, y por lo tanto $\lim j(x_n) = \lim j(y_n)$.

Para demostrar que ϕ es una isometría, tenemos que mostrar que

$$\bar{d}([x_n],[y_n]) = d'(\lim j(x_n), \lim j(y_n)).$$

Pero

$$\bar{d}([x_n],[y_n]) = \lim d(x_n,y_n) = \lim d'(j(x_n),j(y_n)),$$

por lo que, si $j(x_n) \to x$ y $j(y_n) \to y$ en Y, el resultado se sigue de la desigualdad

$$|d'(j(x_n),j(y_n)) - d'(x,y)| \leq d'(j(x_n),x) + d'(j(y_n),y).$$

□

En términos menos precisos, $\bar{X}$ es el "menor espacio métrico completo que contiene a X". El siguiente corolario se sigue de manera inmediata del teorema 2.38.

Corolario 2.39. *Sea X un espacio métrico y $\bar{X}$ su completitud. Entonces, para cada $x \in \bar{X}$ existe una sucesión x_n en X tal que $x_n \to x$ en $\bar{X}$.*

En este corolario, de hecho, estamos identificando a X como subespacio de $\bar{X}$.

Ejercicios

1. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y (x_n) en X tal que, para cada n, $x_n \in B_{1/n}(x)$. Muestre que $x_n \to x$. Utilice este hecho para mostrar la veracidad de los siguientes enunciados:
   - $\frac{1}{n} \to 0$, en $\mathbb{R}$.
   - $\frac{2n}{n+1} \to 2$, en $\mathbb{R}$.
   - Si $a, b, c, d > 0$, entonces
   $$\frac{an+b}{cn+d} \to \frac{a}{c}.$$
2. Sea (x_n) una sucesión en el espacio métrico (X, d) tal que, para todo $N > 0$, existen $n, m \geq N$ con $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0 > 0$. Muestre que (x_n) no tiene ninguna subsucesión convergente.
3. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $E \subset X$. Muestre que el subespacio $(E, d|_{E\times E})$ es completo si, y sólo si, E es cerrado.
4. En este ejercicio mostraremos la completitud de $\mathbb{R}$ a partir del axioma
   * Sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado por arriba. Entonces S tiene un supremo, es decir, una mínima cota superior.

   Siga los siguientes pasos:
   - Muestre que el axioma (*) es equivalente al siguiente enunciado: Sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado por debajo. Entonces S tiene un ínfimo, es decir, una máxima cota inferior.
   - Muestre que toda sucesión en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión monótona.
   - Utilice el axioma (*) y el inciso anterior para mostrar que una sucesión monótona acotada converge en $\mathbb{R}$.
   - Concluya que toda sucesión de Cauchy converge en $\mathbb{R}$.
5. Suponga que los espacios métricos (X, d) y (X, d') son homeomorfos (es decir, $U \subset X$ es abierto en (X, d) si, y sólo si, es abierto en (X, d')). Muestre que (X, d) y (X, d') tienen las mismas sucesiones convergentes; es decir, (x_n) converge en (X, d) si, y sólo si, converge en (X, d'). Esto quiere decir que convergencia es una propiedad topológica.
6. Sin embargo, muestre que completitud no es una propiedad topológica; es decir, de un ejemplo de un espacio X con métricas d y d' tales que (X, d) y (X, d') son homeomorfos, pero uno es completo y otro no.

7. Sin embargo, si $(X, ||\cdot||)$ y $(X, ||\cdot||')$ son homeomorfos, muestre que $(X, ||\cdot||)$ es completo si y sólo si $(X, ||\cdot||')$ lo es.
8. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado y considere la completitud $(\bar{X}, \bar{d})$ de $(X, ||\cdot||)$, construída en la sección 5. Muestre que $\bar{X}$ es un espacio vectorial con las operaciones
$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n], \qquad \lambda[x_n] = [\lambda x_n],$$
y que se puede normar con
$$||[x_n]||' = \text{lím}\, ||x_n||.$$
Verifique que $||\cdot||'$ induce la métrica $\bar{d}$ y, por lo tanto, $(\bar{X}, ||\cdot||')$ es un espacio de Banach.
9. Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, un *reordenamiento* de $\sum x_n$ es la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\phi(n)},$$
donde $\phi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ es una biyección. Suponga que la serie $\sum a_n$ converge a a_0 en $\mathbb{R}$, pero que no es absolutamente convergente. Muestre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un reordenamiento $\sum a_{\phi(n)}$ de $\sum a_n$ tal que $\sum a_{\phi(n)}$ converge a x.
10. Sea $\sum x_n$ una serie en un espacio de Banach que converge absolutamente, y digamos converge a x. Muestre que todos los reordenamientos de $\sum x_n$ convergen a x. (*Sugerencia:* Si $\phi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ es una biyección, entonces $\sum ||x_{\phi(n)}|| = \sum ||x_n||$.)

Capítulo 3

Espacios compactos

1. Cubiertas

En este capítulo estudiaremos el concepto de compacidad en un espacio métrico.

Definición 3.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Una *cubierta* de A es una familia $\{U_\alpha\}$ de conjuntos abiertos en X tales que

$$A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

Es decir, la colección $\{U_\alpha\}$ de conjuntos abiertos *cubre* al conjunto A.

Ejemplo 3.2. Sea $x \in X$. Entonces, por las observaciones hechas después de la definición de bola abierta, tenemos que

$$X \subset \bigcup_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(x),$$

por lo que $\{B_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ es una cubierta de X.

Ejemplo 3.3. Considere el intervalo $(0, 1)$, como subespacio de $\mathbb{R}$. Entonces la colección $\{U_n\}$, con $U_n = (1/n, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$, es una cubierta de $(0, 1)$: Para cualquier $x \in (0, 1)$, existe N tal que

$$\frac{1}{N} < x,$$

por lo que

$$x \in \Big(\frac{1}{N}, 1\Big).$$

De hecho,

$$(0,1)=\bigcup_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{n},1\Big).$$

Ejemplo 3.4. La colección de intervalos abiertos $\{(n-1,n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forma una cubierta para $\mathbb{R}$: Dado $x\in\mathbb{R}$, existe un entero N tal que

$$N\leq x<N+1.$$

(Esto es llamado la propiedad Arquimideana de $\mathbb{R}$). Entonces

$$x\in(N-1,N+1).$$

De nuevo, es fácil ver que

$$\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n-1,n+1).$$

Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta de A, una *subcubierta* es un subconjunto de $\{U_\alpha\}$, digamos $\mathcal{S}=\{U_{\alpha_\beta}\}$, tal que

$$A\subset\bigcup_\beta U_{\alpha_\beta}.$$

Si $\mathcal{S}$ es un conjunto finito, digamos $\mathcal{S}=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\ldots,U_{\alpha_k}\}$, entonces decimos que $\mathcal{S}$ es una *subcubierta finita*.

Ejemplo 3.5. Si $\{B_{\varepsilon_i}(x)\}_{i=1}^k$ es un subconjunto finito de $\{B_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$, entonces

$$\bigcup_i B_{\varepsilon_i}(x)=B_M(x),$$

donde $M=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k\}$. Entonces la cubierta $\{B_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ de X tiene subcubiertas finitas si, y sólo si, X es acotado.

Ejemplo 3.6. Consideremos $A=(0,1)$ y la cubierta $\{(1/n,1)\}_{n=1}^\infty$. Esta cubierta no tiene subcubiertas finitas, ya que

$$\Big(\frac{1}{n_1},1\Big)\cup\Big(\frac{1}{n_2},1\Big)\cup\ldots\cup\Big(\frac{1}{n_k},1\Big)=\Big(\frac{1}{N},1\Big),$$

donde $N=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ y, además, $\dfrac{1}{N}>0$, por lo que $\Big(\dfrac{1}{N},1\Big)$ no cubre a A.

Ejemplo 3.7. La cubierta $\{(n-1,n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ no tiene subcubiertas propias ya que, si $S\subset\mathbb{Z}$ y $n_0\in\mathbb{Z}\setminus S$, entonces

$$n_0\notin\bigcup_{n\in S}(n-1,n+1).$$

Esto se debe a que, si $n\in\mathbb{Z}$ y $n\neq n_0$, entonces

$$n_0\notin(n-1,n+1)$$

porque $n_0 \leq n-1$ ó $n_0 \geq n+1$.

2. Compacidad

En esta sección definimos un espacio compacto y demostramos sus propiedades más elementales.

Definición 3.8. Un subconjunto F del espacio métrico X es *compacto*, si toda cubierta de F tiene una subcubierta finita.

Ejemplo 3.9. El conjunto vacío $\emptyset$ es compacto. porque $\emptyset \subset A$, para cualquier conjunto A.

Ejemplo 3.10. Un conjunto finito es compacto. Para ver ésto, considere una cubierta $\{U_\alpha\}$ del conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Como $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, cada $x_i \in U_{\alpha_i}$ para algún α_i y, por lo tanto,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}.$$

Ejemplo 3.11. El conjunto $(0,1)$ no es compacto en $\mathbb{R}$ porque, como vimos anteriormente, la cubierta $\{(1/n, 1)\}$ no tiene subcubiertas finitas.

Ejemplo 3.12. $\mathbb{R}$ no es compacto ya que la cubierta $\{(n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no tiene subcubiertas finitas (ejemplo 3.7).

Ejemplo 3.13. Si el espacio métrico X es compacto, entonces es acotado, por el ejemplo 3.5.

En las secciones posteriores clasificaremos los subconjuntos compactos de espacios métricos a través de sus sucesiones. De hecho, mostraremos que un conjunto es compacto si, y sólo si, es secuencialmente compacto, es decir, todas sus sucesiones tienen subsucesiones convergentes. Éste es el teorema de Bolzano-Weierstrass, que demostraremos más adelante. Antes, haremos algunas observaciones.

Recordemos que si (X, d) es un espacio métrico y $Y \subset X$, Y se puede metrizar a través de la restricción de d a $Y \times Y$, y al espacio $(Y, d|_{Y\times Y})$ lo llamamos un subespacio de X. Los conjuntos abiertos de Y no necesariemente son abiertos en X. Como ya lo hemos discutido, son aquéllos que son intersecciones de conjuntos abiertos en X con Y y, de manera similar, los conjuntos cerrados en Y son intersecciones de conjuntos cerrados en X con Y. Sin embargo, la compacidad sí se conserva, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *Si Y es un subespacio de X, entonces $A \subset Y$ es compacto en Y si, y sólo si, es compacto en X.*

Demostración. Supongamos que $A \subset Y$ es compacto en Y. Entonces cualquier cubierta de A, en Y, tiene una subcubierta finita. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de A en X, es decir, los conjuntos U_α son abiertos en X. Ahora bien, como $A \subset Y$, los conjuntos $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$ forman una cubierta de A en Y, ya que cada V_α es abierto en Y y

$$A = A \cap Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \cap Y = \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

Como A es compacto en Y, $\{V_\alpha\}$ tiene una subcubierta finita, digamos $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_k}\}$. Por lo tanto $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita de A en X.

Para la inversa, supongamos que $A \subset Y$ y que A es compacto en X. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de A en Y (es decir, los U_α son abiertos en Y). Entonces, para cada α, existe un abierto V_α en X tal que

$$U_\alpha = Y \cap V_\alpha.$$

Como $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, entonces

$$A \subset \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

Así que $\{V_\alpha\}$ es una cubierta de A en X. Como A es compacto en X, existe una subcubierta finita, digamos

$$\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}\}.$$

Entonces

$$\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$$

es una subcubierta finita de A en Y, y por lo tanto es compacto en Y. □

Este teorema nos permite entonces estudiar la compacidad de X, sin importar si este espacio es subespacio de algún otro espacio métrico. También nos sugiere usar la expresión “subespacio compacto” para referirnos a los subconjuntos compactos de un espacio.

Proposición 3.15. *Sea X un espacio compacto, y $E \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces E es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de E. Como E es cerrado, entonces $X \setminus E$ es abierto, por lo que entonces $\{X \setminus E\} \cup \{U_\alpha\}$ es una cubierta de X. Como X es compacto, esta cubierta tiene una subcubierta finita, que a su vez induce una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}$ para E, prescindiendo de $X \setminus E$. □

Esta proposición nos indica que todos los subconjuntos cerrados de un espacio compacto son compactos. Sin embargo, esto no es cierto en general. Por ejemplo, si X no es compacto, entonces, como X es cerrado en sí mismo,

X es un subconjunto cerrado que no es compacto. Sin embargo, el ser cerrado es una condición necesaria, como lo veremos a continuación.

Proposición 3.16. *Sea (X, d) un espacio métrico y F un subespacio compacto. Entonces F es cerrado en X.*

Demostración. Si F no fuese cerrado, entonces tendría un punto de acumulación no contenido en sí mismo, digamos x. Demostraremos que ésto implica que F no es compacto.

Sea $\bar{B}_{1/n}(x)$ la bola cerrada de radio $1/n$ con centro en x. Como $\bar{B}_{1/n}(x)$ es cerrado, entonces $U_n = X \setminus \bar{B}_{1/n}(x)$ es abierto. $\{U_n\}$ es una cubierta de F, ya que

$$\bigcup_n U_n = \bigcup_n (X \setminus \bar{B}_{1/n}(x)) = X \setminus \bigcap_n \bar{B}_{1/n}(x) = X \setminus \{x\} \supset F$$

porque x no está en F. Ahora bien, si $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}\}$ es un subconjunto finito de $\{U_n\}$, entonces

$$U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \ldots \cup U_{n_k} = X \setminus \bar{B}_{1/N}(x),$$

donde

$$N = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}.$$

Sin embargo, tal unión no contiene a F porque x es un punto de acumulación y, por lo tanto, $F \cap \bar{B}_{1/N}(x) \neq \emptyset$. Entonces $\{U_n\}$ no tiene subcubiertas finitas, por lo que F no es compacto. $\square$

Ahora bien, hemos visto que, si X es compacto, entonces tiene que ser acotado. Más aún, X tiene que ser totalmente acotado.

Definición 3.17. Sea (X, d) un espacio métrico. X es *totalmente acotado* si, para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$X \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(x_n).$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, X puede ser cubierto por un número infinito bolas de radio ε.

Si X es compacto y $\varepsilon > 0$, entonces la colección $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta de X, la cual tiene una subcubierta finita por compacidad. Por lo tanto X es totalmente acotado.

Ejemplo 3.18. Hemos visto que el espacio $(0, 1)$ no es compacto al describir una cubierta sin subcubiertas finitas. Más aún, $(0, 1)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, por lo que la proposición 3.16 también implica que $(0, 1)$ no es compacto. Nótese que 0 es un punto de acumulación de (0,1) no contenido en él, y que además $(1/n, 0) = (0, 1) \setminus \bar{B}_{1/n}(0)$, como en la demostración de la proposición 3.16.

Ejemplo 3.19. El espacio $\mathbb{R}$, con la métrica acotada, es acotado, pero no es totalmente acotado y, por lo tanto, no es compacto. Otra manera de ver que no es compacto es por el hecho de que la métrica estándar es equivalente a la métrica acotada y, por lo tanto, inducen la misma topología y tienen los mismos subespacios compactos (ejercicio 2).

En la siguiente sección mostraremos que otra condición necesaria para que un espacio métrico sea compacto es completitud. De hecho, mostraremos también la inversa: si (X, d) es completo y totalmente acotado, entonces es compacto.

Terminaremos esta sección con el siguiente resultado, referente a la distancia entre un conjunto compacto y un conjunto cerrado, y que extiende la proposición 1.46.

Proposición 3.20. *Sea (X, d) un espacio métrico, $E \subset X$ un subconjunto cerrado en X y $F \subset X$ un subespacio compacto tal que $E \cap F = \emptyset$. Entonces la distacia entre E y F es positiva.*

Demostración. La distancia entre dos conjuntos E y F está determinada por

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E,\ y \in F\}.$$

Mostraremos que este número es positivo. Por la proposición 1.46, para cada $x \in F$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(x) \cap E = \emptyset$. La colección $\{B_{\varepsilon_x/2}(x)\}_{x \in F}$ es una cubierta de F y, como F es compacto, tiene una subcubierta finita. Supongamos que

$$F \subset B_{\varepsilon_{x_1}/2}(x_1) \cup B_{\varepsilon_{x_2}/2}(x_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{x_k}/2}(x_k),$$

y sea

$$r = \text{mín}\{\varepsilon_{x_1}/2, \varepsilon_{x_2}/2, \ldots, \varepsilon_{x_k}/2\}.$$

Entonces $r > 0$ y, además, si $y \in F$, y está en alguna de las bolas $B_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$, por lo que $d(y, x_i) < \varepsilon_{x_i}/2$. Como $B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \cap E = \emptyset$, $d(x_i, x) \geq \varepsilon_{x_i}$, para todo $x \in E$, y, por la desigualdad del triángulo,

$$d(y, x) \geq d(x_i, x) - d(y, x_i) > \varepsilon_{x_i} - \varepsilon_{x_i}/2 = \varepsilon_{x_i}/2 \geq r.$$

Concluímos entonces que $d(E, F) \geq r > 0$. □

3. El teorema de Bolzano-Weierstrass

Recordemos que un espacio métrico (X, d) es secuencialmente compacto si toda sucesión en X tiene una subsucesión que converge. Esta propiedad es equivalente a compacidad, lo cual demostramos a continuación.

Teorema 3.21 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Si $A \subset X$ es infinito, entonces A tiene al menos un punto de acumulación.*
3. *X es secuencialmente compacto.*

La demostración de este teorema la haremos en tres pasos:

Paso 1: $1 \Rightarrow 2$.

Paso 2: $2 \Rightarrow 3$.

Paso 3: $3 \Rightarrow 1$.

Demostración del Paso 1: Supongamos que A es un subconjunto de X que no tiene puntos de acumulación. Demostraremos que A es finito.

Como A no tiene puntos de acumulación, es un conjunto cerrado. Luego $U = X \setminus A$ es abierto. Además, para cada $x \in A$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$B_{e_x} \cap A = \{x\}$$

porque x no es un punto de acumulación de A. Sea

$$U_x = B_{\varepsilon_x}(x).$$

Entonces la colección

$$\{U\} \cup \{U_x\}_{x \in A}$$

es una cubierta de X y, como X es compacto, tiene una subcubierta finita, digamos $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Como cada U_i tiene a lo más un solo punto de A, podemos concluír que A tiene a lo más k puntos; es decir, A es finito. $\square$

Demostración del Paso 2: Sea (x_n) una sucesión en X. Si (x_n) tiene rango finito, entonces tiene una subsucesión convergente (ejercicio 4). Así que asumimos que $\{x_n\}$ es un conjunto infinito y, por lo tanto, tiene un punto de acumulación, digamos x. Ahora bien, para cada k, podemos escoger x_{n_k} tal que $n_{k+1} > n_k$ y, además, $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$, ya que x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$. Como $d(x_{n_k}, x) < 1/k$ para cada k, (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n) que converge a x. $\square$

La demostración del Paso 3 es más difícil y la dividiremos en algunos lemas. El primero de éstos establece la existencia del llamado número de Lebesgue, el cual describimos a continuación.

Lema 3.22 (Lebesgue)**.** *Sea (X, d) un espacio secuencialmente compacto y $\{U_\alpha\}$ una cubierta de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe un α tal que $B_\delta(x) \subset U_\alpha$.*

Es decir, **todas** las bolas de radio δ están contenidas en algún conjunto de la colección $\{U_\alpha\}$. El número δ no depende de x ó α. El supremo de todos los $\delta > 0$ que satisfacen esta condición es llamado el *número de Lebesgue* de la cubierta $\{U_\alpha\}$. Éste numero depende de X, de la métrica d y de la cubierta.

Demostración. Demostraremos este lema por contradicción. Suponemos que, para cada $\delta > 0$, existe alguna bola $B_\delta(x)$ en X que no está contenida en ningún U_α. Entonces podemos construir una sucesión (x_n), en X, tal que $B_{1/n}(x_n)$ no está contenida en ningún U_α. Como X es secuencialmente compacto, (x_n) tiene una subsucesión convergente, digamos $x_{n_k} \to x$ en X. Como $\{U_\alpha\}$ es una cubierta, $x \in U_{\alpha_0}$ para algún α_0. Pero U_{α_0} es abierto, por lo que

$$B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$$

para algún $\varepsilon > 0$. Ahora bien, $x_{n_k} \to x$, así que existe un entero N, que podemos escoger mayor que $2/\varepsilon$, tal que

$$d(x_N, x) < \varepsilon/2.$$

Sin embargo, ésto implica que

$$B_{1/N}(x_N) \subset U_{\alpha_0}$$

porque, si $z \in B_{1/N}(x_N)$, entonces $d(z, x_N) < 1/N$ y, por la desigualdad del triángulo,

$$d(z,x) \leq d(z,x_N) + d(x_N,x) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y

$$z \in B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}.$$

Hemos llegado a una contradicción y, por lo tanto, debe existir un $\delta > 0$ con la propiedad deseada. $\square$

Al igual que los espacios compactos, los espacios secuencialmente compactos son totalmente acotados.

Lema 3.23. *Sea (X,d) secuencialmente compacto. Entonces (X,d) es totalmente acotado.*

Demostración. Supongamos que X no es totalmente acotado. Demostraremos entonces que X no es secuencialmente compacto.

Como X no es totalmente acotado, existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ε_0. Construímos entonces la siguiente sucesión: Tomamos $x_1 \in X$. Una vez que hayamos tomado $x_1, \ldots, x_n$, tomamos x_{n+1} tal que

$$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Esto posible porque

$$X \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Es fácil ver que (x_n) no tiene subsucesiones convergentes, porque

$$d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$$

para todo m, n. $\square$

Ahora sí estamos listos para terminar con la demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Demostración del Paso 3: Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de X. Como X es secuencialmente compacto, el lema de Lebesgue establece la existencia de un $\delta > 0$ tal que toda bola de radio δ está contenida en algún U_α. Por el lema 3.23, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que

$$X \subset B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \ldots \cup B_\delta(x_n).$$

Ahora bien, sea α_i tal que $B_\delta(x_i) \subset U_{\alpha_i}$. Entonces

$$X \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n},$$

y, por lo tanto, $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}$. $\square$

Una de las consecuencias directas del teorema de Bolzano-Weierstrass es el hecho que completitud es una condición necesaria para compacidad. Ésto lo dejamos como ejercicio (ejercicio 6). El siguiente corolario caracteriza los espacios compactos a través de completitud y la propiedad de ser totalmente acotado.

Corolario 3.24. *El espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Ya hemos visto que, si X es compacto, entonces es completo y totalmente acotado. Asumimos entonces que X es completo y totalmente acotado y demostraremos que X es secuencialmente compacto. El teorema de Bolzano-Weierstrass implica que X es compacto.

Sea (x_n) una sucesión en X y asumimos que tiene rango infinito. Ahora bien, como X es totalmente acotado, X es cubierto por un número finito de bolas de radio 1. Sea B_1 alguna de estas bolas que contenga un número infinito de términos de la sucesión (x_n). A su vez, B_1 es totalmente acotado y podemos entonces encontrar un bola de radio $1/2$, a la cual llamamos B_2, que contiene infinitos términos de la sucesión (x_n), contenidos en B_1. Por inducción, tenemos bolas B_k de radio $1/k$ tal que cada una contiene un número infinito de términos de la sucesión (x_n) contenidos en B_{k-1}. Podemos entonces escoger una subsucesión (x_{n_k}) tal que

$$x_{n_k} \in B_i, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

Demostraremos que (x_{n_k}) es de Cauchy y, por la completitud de X, converge.

Sea $\varepsilon > 0$ y $K > 2/\varepsilon$. Por construcción, para todo $k \geq K$,

$$x_{n_k} \in B_K$$

y B_K es una bola de radio $1/K < \varepsilon/2$. Entonces, si $k, l \geq K$,

$$x_{n_k}, x_{n_l} \in B_K$$

y

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, y_0) + d(y_0, x_{n_l}) < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K} < \varepsilon,$$

donde y_0 es el centro de B_K. Por lo tanto, la subsucesión (x_{n_k}) en una sucesión de Cauchy, como queríamos demostrar. □

Corolario 3.25. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $E \subset X$. Entonces el subespacio $(E, d|_{E\times E})$ es compacto si, y sólo si, E es cerrado y totalmente acotado en X.*

Demostración. La demostración se sigue fácilmente del teorema 2.21. □

4. Compacidad en espacios de Banach

Si $X = \mathbb{R}^l$ con la métrica euclideana (o con cualquier métrica inducida por una norma en $\mathbb{R}^l$), entonces el corolario anterior se simplifica.

Corolario 3.26 (Teorema de Heine-Borel)**.** *$E \subset \mathbb{R}^l$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

Demostración. Por el corolario 3.25, es suficiente con demostrar que, si E es acotado, entonces es totalmente acotado. Esto es fácil y se deja como ejercicio al lector (ejercicio 7). □

Una de las aplicaciones del teorema de Heine-Borel es el hecho de que todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^l$ es la unión contable creciente de conjuntos compactos. Estableceremos este hecho como una proposición, la cual nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

Proposición 3.27. *Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^l$. Entonces existe una sucesión creciente de conjuntos compactos F_k, es decir, $F_k \subset F_{k+1}$, tal que*

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Además, todo compacto K contenido en Ω está contenido en algún F_k.

Demostración. Sea A_k el conjunto dado por los puntos en Ω a distancia $1/k$ del complemento de Ω; es decir,

$$A_k = \Big\{ x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^l \setminus \Omega) \geq \frac{1}{k} \Big\}.$$

Por el ejercicio 8, A_k es cerrado en $\mathbb{R}^l$. Definimos entonces el conjunto

$$F_k = A_k \cap \bar{B}_k(0).$$

donde $\bar{B}_k(0)$ es la bola cerrada de radio k con centro en 0. Entonces F_k es cerrado y acotado y, por el teorema de Heine-Borel, es compacto. Como

$$A_k \subset A_{k+1} \quad \text{y} \quad \bar{B}_k(0) \subset \bar{B}_{k+1}(0),$$

tenemos

$$F_k \subset F_{k+1}.$$

Como cada $F_k \subset \Omega$, $\bigcup_k F_k \subset \Omega$. Ahora bien, sea K un conjunto compacto contenido en Ω. Por la proposición 3.20,

$$r = d(K, \mathbb{R}^l \setminus \Omega) > 0.$$

Sean k_1 y k_2 enteros tales que

$$K \subset B_{k_1}(0) \quad \text{y} \quad \frac{1}{k_2} < r.$$

Entonces, si k_0 es el máximo de los enteros k_1 y k_2, $K \subset F_{k_0}$. En particular, si $K = \{x\}$, para algún $x \in \Omega$, ésto también muestra que existe k_0 tal que $x \in F_{k_0}$, por lo que $\Omega \subset \bigcup_k F_k$. □

El teorema de Heine-Borel implica que una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, puesto que es cerrado y acotado. Lo mismo ocurre en un espacio de Banach de dimensión finita, por el teorema 2.28 y los ejercicios 9 del capítulo 1 y 2 de éste.

Sin embargo, el teorema de Heine-Borel no puede ser extendido a un espacio de dimensión finita, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.28. Consideremos la bola cerrada de radio 1 con centro en 0 en el espacio de funciones continuas en $[0,1]$, $\bar{B}_1(0) \subset C([0,1])$. La sucesión de funciones (f_n)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

está en $B_1(0)$ (véase la figura 1). Esta sucesión no puede tener subsucesiones

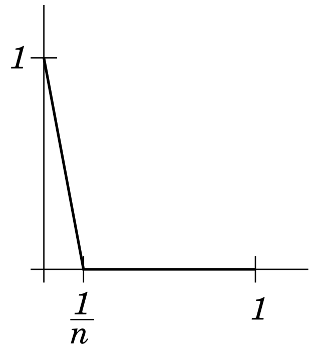

Figura 1. Las funciones f_n.

convergentes, ya que si tomamos $1/m < x < 1/n$, y $m \geq 2n$,

$$||f_n - f_m||_u \geq |f_n(x) - f_m(x)| = (m-n)x > \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m} \geq \frac{1}{2}.$$

Entonces $B_1(0)$ no es secuencialmente compacto, y por lo tanto no es compacto.

En el siguiente capítulo estudiaremos con detalle los subconjuntos compactos de $C([0,1])$.

De hecho, si X es un espacio de Banach en el cual las bolas cerradas son compactas, entonces X tiene que ser de dimensión finita.

Teorema 3.29. *Sea X un espacio de Banach tal que la bola cerrada $\bar{B}_1(0)$ es un conjunto compacto. Entonces* $\dim X < \infty$.

Demostración. Como $\bar{B}_1(0)$ es compacto, entonces es totalmente acotado, por lo que existen $x_1, \ldots, x_l \in X$ tales que

$$\bar{B}_1(0) \subset B_{1/2}(x_1) \cup \ldots \cup B_{1/2}(x_l).$$

Sea Y el subespacio de X generado por los puntos $x_1, \ldots, x_l$. Demostraremos primero que $B_1(0) \subset \bar{Y}$. Para esto, tomamos $x \in B_1(0)$ y construiremos una sucesión (y_n) en Y tal que $y_n \to x$.

Primero, como $B_1(0) \subset B_{1/2}(x_1) \cup \ldots \cup B_{1/2}(x_l)$, existe un i_1 tal que $x \in B_{1/2}(x_{i_1})$. Tomamos $y_1 = x_{i_1}$. Entonces $||y_1 - x|| < 1/2$, por lo que $||2(y_1 - x)|| < 1$ y $2(y_1 - x) \in B_1(0)$. De nuevo, existe i_2 tal que $2(y_1 - x) \in B_{1/2}(x_{i_2})$. Entonces

$$||2(y_1 - x) - x_{i_2}|| < \frac{1}{2},$$

y luego

$$||y_1 - \frac{1}{2}x_{i_2} - x|| < \frac{1}{4}.$$

Tomamos $y_2 = y_1 - \frac{1}{2}x_{i_2}$, y entonces $||y_2 - x|| < \frac{1}{4}$. Observemos que, como $y_1, x_{i_2} \in Y$ y Y es un subespacio de X, entonces $y_2 \in Y$.

Proseguimos de manera inductiva: Una vez que hemos escogido $y_n \in Y$ con $||y_n - x|| < \frac{1}{2^n}$, observamos que $||2^n(y-x)|| < 1$, por lo que $2^n(y_n - x) \in B_1(0)$ y existe i_{n+1} tal que $2^n(y_n - x) \in B_{1/2}(x_{i_{n+1}})$. Luego

$$||2^n(y_n - x) - x_{i_{n+1}}|| < \frac{1}{2},$$

por lo que

$$||y_n - \frac{1}{2^n}x_{i_{n+1}} - x|| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Escogemos entonces $y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2^n}x_{i_{n+1}}$ y, de la misma forma, vemos que $y_{n+1} \in Y$ y $||y_{n+1} - x|| < \frac{1}{2^{n+1}}$.

Tenemos entonces que (y_n) es una sucesión en Y que converge a x, como queríamos demostrar, así que $B_1(0) \subset \bar{Y}$. Pero Y es cerrado por el corolario 2.31, por lo que entonces $B_1(0) \subset Y$. Sin embargo, también tenemos que

$$B_r(0) \subset Y$$

para todo $r > 0$, ya que, si $x \in B_r(0)$, entonces $||x|| < r$, y

$$||\frac{1}{r}x|| < 1,$$

por lo que $\frac{1}{r}x \in B_1(0) \subset Y$, y entonces $x \in Y$ porque Y es un subespacio de X. Como

$$X \subset \bigcup_{r>0} B_r(0),$$

podemos concluír que $X \subset Y$. Por lo tanto, $\dim X \leq l$. $\square$

Ejercicios

1. Muestre que el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica acotada no es totalmente acotado.
2. Sean d_1 y d_2 dos métricas equivalentes en X. Muestre que (X, d_1) es compacto si, y sólo si, (X, d_2) es compacto.
3. Sea (X, d) un espacio discreto. Establezca una condición necesaria y suficiente para que X sea compacto.
4. Sea (x_n) una sucesión con rango finito, es decir, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es finito. Muestre que (x_n) tiene una subsucesión que converge.
5. Sin utilizar el teorema de Bolzano-Weierstrass, muestre que, si X es secuencialmente compacto, entonces todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.
6. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Muestre que X es completo.
7. Sea E un conjunto acotado en $\mathbb{R}^l$. Recuerde que esto significa que $E \subset B_M(x)$ para algún $M > 0$ y $x \in \mathbb{R}^l$.
   - Muestre que existe un $M > 0$ tal que $E \subset B_M(0)$.
   - Muestre que la bola $B_M(0)$ es un conjunto totalmente acotado, y concluya que E es totalmente acotado.
8. Sea A un subconjunto del espacio métrico (X, d), y sea $\varepsilon > 0$. Muestre que el conjunto
   $$\{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$$
   es abierto en X.
9. Sea E un conjunto compacto en $\mathbb{R}$. Muestre que E tiene un mínimo y un máximo.
10. Sea A un conjunto infinito acotado en $\mathbb{R}^l$. Muestre que A tiene un punto de acumulación. Este enunciado es llamado el teorema de Bolzano-Weierstrass en algunos textos.
11. Sea (x_n) una sucesión acotada en $\mathbb{R}^l$. Muestre que (x_n) tiene una subsucesión que converge. Este resultado es la versión clásica del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Capítulo 4

El espacio de funciones continuas

1. Funciones continuas

En este capítulo estudiaremos las funciones continuas en un espacio métrico, además de espacios métricos formados por funciones continuas. También estudiaremos la convergencia de sucesiones de funciones continuas en un espacio métrico.

Primero definimos el concepto de continuidad en un espacio métrico.

Definición 4.1. Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos, y $f : X \to Y$. Decimos que la función f es *continua en* $x_0 \in X$ si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Por la definición de bola abierta, esta definición es equivalente a decir que f es continua en x_0 si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)),$$

donde $f(B_\delta(x_0))$ es la imagen de $B_\delta(x_0)$ bajo f, es decir

$$f(B_\delta(x_0)) = \big\{y \in Y : \text{ existe } x \in B_\delta(x_0) \text{ tal que } f(x) = y\big\}$$

y $B_\varepsilon(f(x_0))$ es la bola *en* Y de radio ε alrededor de $f(x_0)$.

Observemos que la definición de continuidad es *local*; es decir, está definida sobre cada punto de X. Sin embargo, *globalmente* decimos que la función $f : X \to Y$ es *continua* si es continua en x para todo $x \in X$. Tenemos la siguiente caracterización de continuidad.

Proposición 4.2. *$f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, para todo conjunto abierto V en Y, la preimagen de V en X,*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\},$$

es un conjunto abierto en X.

Observemos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X si, y sólo si, para cada $x \in f^{-1}(V)$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$, esto es, $f(B_\delta(x)) \subset V$. (Véase la figura 1.)

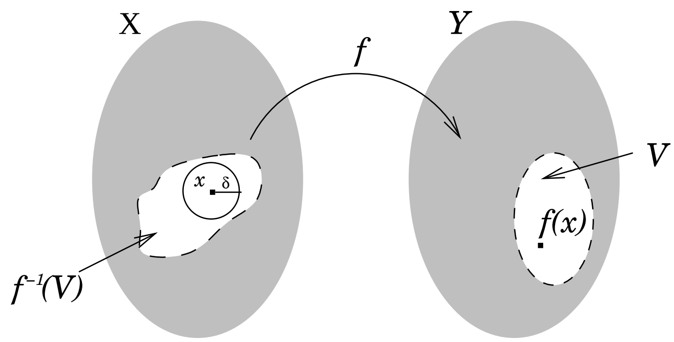

Figura 1. Si f es continua, V es abierto en Y y $f(x) \in V$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua y V un conjunto abierto en Y. Para demostrar que $f^{-1}(V)$ es abierto, sea $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$. Como V es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_e(f(x)) \subset V.$$

Como f es continua, es continua en x, así que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_e(f(x)) \subset V,$$

lo cual muestra que $f^{-1}(V)$ es abierto, por la observación anterior.

De manera inversa, supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo conjunto V abierto en Y, y sea $x \in X$. Para demostrar que f es continua en x, sea $\varepsilon > 0$. Como $B_e(f(x))$ es abierto en Y, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ es abierto en X y $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))),$$

lo cual significa que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)),$$

como queríamos demostrar. □

Ejemplo 4.3. Las funciones continuas más simples son la *funciones constantes*. Si $y_0 \in Y$, definimos la función $f : X \to Y$ como $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Entonces, si V es un conjunto abierto en Y,

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} X & \text{si } y_0 \in V, \\ \emptyset & \text{si } y_0 \notin V. \end{cases}$$

Como X y $\emptyset$ son abiertos en X, f es continua.

Ejemplo 4.4. La *función identidad* es otro ejemplo sencillo de una función continua. Definimos $f : X \to X$ como $f(x) = x$ para cada $x \in X$. Entonces $f^{-1}(V) = V$ para cada abierto V en X, por lo que concluímos que f es continua.

Proposición 4.5. *Sean (X, d), (Y, d') y (Z, d'') espacios métricos, y $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$ funciones continuas. Si le asignamos a $Y \times Z$ la métrica producto, entonces la función $F : X \to Y \times Z$ dada por $F(x) = (f(x), g(x))$ es continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\text{si } d(x, x_0) < \delta_1 \text{ entonces } d'(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\text{si } d(x, x_0) < \delta_2 \text{ entonces } d''(g(x), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, si $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y $d(x, x_0) < \delta$,

$$\begin{aligned} d' \times d''(F(x), F(x_0)) &= d' \times d''((f(x), g(x)), (f(x), g(x))) \\ &= d'(f(x), f(x_0)) + d''(g(x), g(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Es fácil ver que la proposición 4.5 se puede generalizar a un cualquier número finito de funciones $f_i : X \to X_i$, donde al producto $X_1 \times \cdots \times X_l$ se le asigna la métrica

$$d_P((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_l)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$

donde cada d_i es la métrica de X_i.

Proposición 4.6. *Si $(X, d), (Y, d')$ y (Z, d'') son espacios métricos, y las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Si V es abierto en Z, entonces

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

es abierto en X, porque, como g es continua, $g^{-1}(V)$ es abierto en Y y, como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es abierto en X. □

El siguiente teorema establece la compacidad de la imagen de un espacio compacto bajo una función continua.

Teorema 4.7. *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos, y $f : X \to Y$ continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

En la demostración de este teorema utilizaremos el siguiente lema, referente a propiedades básicas de conjuntos imagen y preimagen de funciones.

Lema 4.8. *Sea $f : X \to Y$ un función. Entonces*

1. $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ *para todos* $A, B \subset X$.
2. $f(f^{-1}(A)) \subset A$ *para todo* $A \subset Y$.

La demostración de esta lema se sigue directamente de las definiciones de conjuntos imagen y preimagen bajo cualquier función, y se deja como ejercicio (ejercicio 2).

Demostración del Teorema 4.7: Tomamos una cubierta $\{V_\alpha\}$ del conjunto $f(X)$ en Y. Como f es continua, los conjuntos $f^{-1}(V_\alpha)$ son abiertos, y además cubren a X: si $x \in X$, entonces $f(x) \in X$, por lo que, para algún α, $f(x) \in V_\alpha$. Entonces $x \in f^{-1}(V_\alpha)$. Por lo tanto $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ es una cubierta de X, y como X es compacto tiene una subcubierta finita, digamos

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup f^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\alpha_k}).$$

Entonces, por el lema 4.8

$$\begin{aligned} f(X) &\subset f(f^{-1}(V_{\alpha_1})) \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_2})) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_k})) \\ &\subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \ldots \cup V_{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(X)$ es compacto. □

Si X es compacto y f es una función continua en X, entonces no sólo podemos concluír que $f(X)$ es compacto, sino que f también es uniformente continua. Esto lo veremos a continuación.

Definición 4.9. Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos, y $f : X \to Y$. Decimos que f es *uniformemente continua* si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

para todo $x \in X$.

A diferencia de la definición de continuidad en $x \in X$, el número δ de la definición de continuidad uniforme depende sólo de $\varepsilon > 0$ y f, no de x.

Ejemplo 4.10. Considere la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. Entonces f es continua, ya que si $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $(a > 0)$ entonces

$$f((1/b, 1/a)) = (a,b),$$

por lo que podemos concluír que $f^{-1}(V)$ es abierto si V es abierto en $\mathbb{R}$. Pero f no es uniformemente continua. Considere, por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Para cualquier $\delta > 0$, tal que $\delta < 1/3$, si $x = 2\delta$, entonces

$$f(B_\delta(x)) = f((\delta, 3\delta)) = \Big(\frac{1}{3\delta}, \frac{1}{\delta}\Big) \not\subset B_1\Big(\frac{1}{2\delta}\Big).$$

Véase la figura 2.

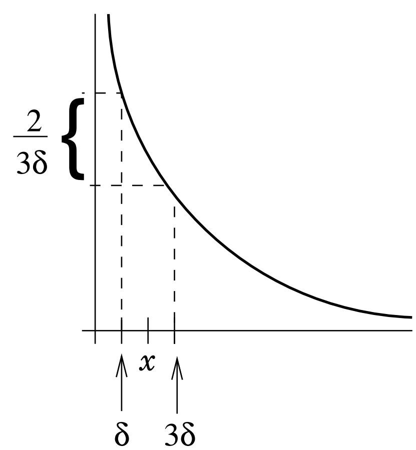

Figura 2. Gráfica de la función $f(x) = 1/x$. Si $0 < \delta < 1/3$, entonces la diferencia entre $f(\delta)$ y $f(3\delta)$ es $\frac{2}{3\delta} > 1$.

Teorema 4.11. *Sean (X,d) y (Y,d') dos espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es continua y X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, para cada $x \in X$, existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_{\varepsilon/2}(f(x))$. Claramente $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta de X, y como X es compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass implica que es secuencialmente compacto, y podemos utilizar el Lema de Lebesgue, lema 3.22, para encontrar un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$B_\delta(x) \subset B_{\delta_{y_0}}(y_0)$$

para algún $y_0 \in X$. Tal número δ no depende de x, sólo de la cubierta. Ahora bien, si $z \in B_\delta(x)$, entonces $z \in B_{\delta_{y_0}}(y_0)$, y más aún,

$$\begin{aligned} d'(f(z), f(x)) &\le d'(f(z), f(y_0) + d'(f(y_0), f(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ya que $f(B_{\delta_{y_0}}(y_0)) \subset B_{\varepsilon/2}(f(y_0))$. Por lo tanto

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)),$$

como queríamos demostrar. □

1.1. Funciones continuas en espacios normados. Si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado y a $X \times X$ se le asigna la métrica producto

$$d((x,y),(x',y')) = ||x - x'|| + ||y - y'||,$$

entonces la función $(+) : X \times X \to X$, dada por la suma de dos vectores, es decir, $(+)(x,y) = x + y$, es una función continua. Para verificar ésto, sea $(x_0, y_0) \in X \times X$ y $\varepsilon > 0$. Si $\delta = \varepsilon$ y

$$||x - x_0|| + ||y - y_0|| < \delta,$$

entonces

$$\begin{aligned} ||(+)(x,y) - (+)(x_0,y_0)|| &= ||(x+y) - (x_0 + y_0)|| \\ &\le ||x - x_0|| + ||y - y_0|| < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $(+)$ es continua en (x_0, y_0).

De la misma forma, si $(X, ||\cdot||)$, podemos demostrar que la multiplicación escalar $(\cdot) : \mathbb{R} \times X \to X$ dada por $(\cdot)(\alpha, x) = \alpha x$ es una función continua.

Ejemplo 4.12. Las proposiciones 4.5 y 4.6 y el hecho de que la suma de vectores es continua implican que si $f, g : X \to Y$ son dos funciones continuas del espacio métrico (X, d) al espacio normado $(Y, ||\cdot||)$, entonces la suma $f+g : X \to Y$, definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ es una función continua, porque $x \mapsto f(x) + g(x)$ es la composición de las funciones $x \mapsto (f(x), g(x))$ y $(+)$.

Desde luego, podemos generalizar este resultado a cualquier número de funciones $f_i : X \to Y$, $i = 1, \dots, l$.

A continuación estudiaremos la continuidad de funcional lineales en espacios normados.

Teorema 4.13. *Sean $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ dos espacios normados y $\phi : X \to Y$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *ϕ es continua en 0;*
2. *Existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$||\phi(x)||_Y \le M||x||_X.$$

3. *ϕ es continua;*

Demostración. **1⇒2:** Como ϕ es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que si $||x||_X < \delta$ entonces $||\phi(x)||_Y < 1$. Entonces, para $x \in X$, si $x \neq 0$,

$$\Big|\Big|\frac{\delta}{2||x||_X}x\Big|\Big|_X = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

por lo que

$$\Big|\Big|\phi\Big(\frac{\delta}{2||x||_X}x\Big)\Big|\Big|_Y < 1,$$

y entonces, como ϕ es lineal,

$$||\phi(x)||_Y < \frac{2}{\delta}||x||_X.$$

Podemos tomar $M = \dfrac{2}{\delta}$.

2⇒3: Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Si tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, entonces $||y-x||_X < \delta$ implica

$$||\phi(y) - \phi(x)||_Y = ||\phi(y - x)||_Y \leq M||y - x||_X < M\delta = e.$$

3⇒1: Esta implicación es trivial.

□

Ejemplo 4.14. Consideremos $C([0,1])$, y la función $I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Entonces

$$|I(f)| = \Big|\int_0^1 f(x)dx\Big| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 ||f||_u dx = ||f||_u.$$

Entonces I es continua.

Ejemplo 4.15. Sea $K : [0,1] \times [0,1]$ una función continua y $f \in C([0,1])$. Definimos la función $Lf : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$Lf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Mostraremos que Lf es continua: Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in [0,1]$. Entonces, si $||f||_u \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2||f||_u},$$

ya que K es uniformemente continua porque $[0,1]\times[0,1]$ es compacto. Entonces, para $|x-x_0|<\delta$,

$$\begin{aligned}|Lf(x)-Lf(x_0)| &= \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy - \int_0^1 K(x_0,y)f(y)dy\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x,y)-K(x_0,y)||f(y)|dy \\ &\leq \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2||f||_u}||f||_u dy = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto significa que L define una función (lineal) $L : C([0,1]) \to C([0,1])$. Para ver que L es de hecho continua, observamos que, si

$$M = \text{máx}\{|K(x,y)| : x,y \in [0,1]\},$$

entonces

$$|Lf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f(y)|dy \leq \int_0^1 M||f||_u dy = M||f||_u$$

para $x \in [0,1]$. Entonces L es continua por el teorema 4.13.

Ejemplo 4.16. Consideremos ahora el espacio $C^1([0,1])$ de funciones diferenciables f en $[0,1]$ tal que $f' \in C([0,1])$, es decir, funciones diferenciables con derivada continua. Es claro que $C^1([0,1]) \subset C([0,1])$, así que podemos ver a $C^1([0,1])$ como subespacio de $C([0,1])$.

Definimos la función $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ como

$$D(f) = f',$$

D es llamada el operador diferencial. Es claro que D es lineal; sin embargo, no es continua. Consideremos las funciones

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\,\text{sen}(n^2\pi x).$$

Como $||f_n||_u = \dfrac{1}{n}$, $f_n \to 0$ en $C([0,1])$ (y en $C^1([0,1])$, desde luego). Sin embargo,

$$D(f_n) = n\pi\cos(n^2\pi x),$$

por lo que $||D(f_n)||_u = n\pi$. Entonces D no es continua en 0.

El ejemplo 4.16 implica que una función lineal en un espacio normado no es necesariamente continua. Sin embargo, si el espacio donde está definida es de dimensión finita, entonces sí lo es.

Teorema 4.17. *Si $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ son dos espacios normados, X es de dimensión finita y $\phi : X \to Y$ es una transformación lineal, entonces ϕ es una función continua.*

La demostración de este teorema se sigue del siguiente lema. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado de dimensión finita y sea $\{u_1, \ldots, u_l\}$ una base. Definimos las funciones $\pi_i : X \to \mathbb{R}$ de la forma

$$x = \pi_1(x)u_1 + \ldots \pi_l(x)u_l.$$

Es decir, las π_i son las proyecciones de X sobre cada uno de los términos de la base.

Lema 4.18. *Cada proyección π_i es una función continua.*

Demostración. Sea $\psi : X \to \mathbb{R}^l$ el isomorphismo

$$\psi(x) = (\pi_1(x), \ldots, \pi_l(x)).$$

Por el teorema 2.28, existe $C > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$||\psi(x)||_E \leq C||x||.$$

Como $|\pi_i(x)| \leq ||\psi(x)||_E$, el lema se sigue del teorema 4.13. $\square$

Demostración del Teorema 4.17: El teorema se sigue entonces por las observaciones hechas en el ejemplo 4.12 y el hecho de que ϕ es la suma de las funciones dadas por $x \mapsto \pi_i(x)\phi(u_i)$. $\square$

2. El espacio $C(X,Y)$

En esta sección estudiaremos las funciones continuas como elementos de un espacio métrico de funciones.

Definición 4.19. Sea $f : X \to Y$ una función de X al espacio métrico (Y,d). Decimos que f es *acotada* si existen $y_0 \in Y$ y $M > 0$ tales que

$$d(f(x), y_0) < M$$

para todo $x \in X$. Esto es equivalente a decir que la imagen de f, $f(X)$, es un conjunto acotado en Y.

Ejemplo 4.20. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

f es acotada porque $|f(x)| \leq 1/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.21. Considere una función continua $f : X \to Y$, donde X es compacto. Entonces $f(X)$ es compacto, y por lo tanto es acotado en Y. Tenemos que f es acotada.

Definición 4.22. Sean (X,d) y (Y,d') dos espacios métricos. Definimos el conjunto $C(X,Y)$ como el conjunto de funciones continuas y acotadas de X a Y.

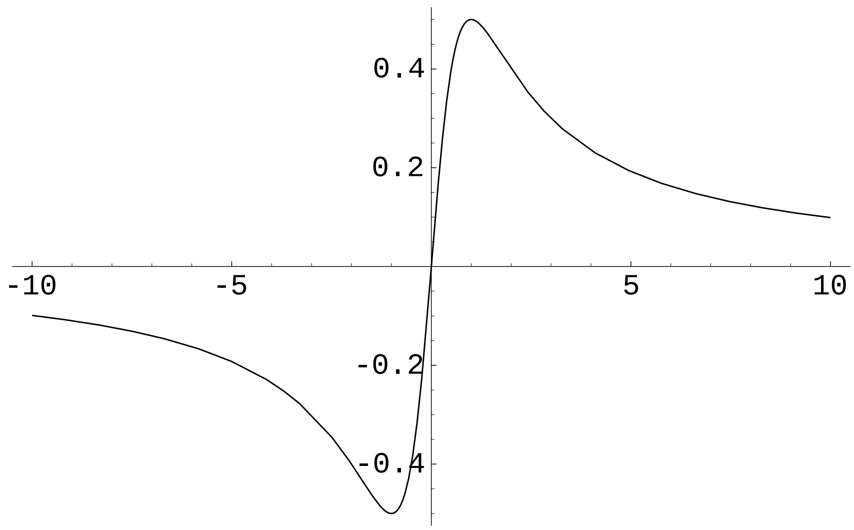

Figura 3. Gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Como $-1/2 \leq f(x) \leq 1/2$, la función f es acotada.

Si X es compacto, entonces $C(X, Y)$ incluye a todas las funciones continuas de X a Y.

El conjunto $C(X, Y)$ se puede metrizar a través de la función

$$\rho_u(f, g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)). \tag{4.1}$$

Esta función está bien definida, ya que si f y g son dos funciones acotadas, entonces existen y_0 y y_0' en Y, $M, M' > 0$, tales que

$$d'(f(x), y_0) < M \qquad \text{y} \qquad d'(g(x), y_0') < M'$$

para todo $x \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} d'(f(x), g(x)) &\leq d'(f(x), y_0) + d'(y_0, y_0') + d'(g(x), y_0') \\ &< M + d'(y_0, y_0') + M' = \bar{M} < \infty, \end{aligned}$$

por lo que $\sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)) \leq \bar{M}$. Ahora verificamos que ρ_u es una métrica:

1. Como d' es una métrica, entonces $d'(f(x), g(x)) \geq 0$ para todo $x \in X$ y $f, g \in C(X, Y)$, por lo que entonces $\rho_u(f, g) \geq 0$. Además, si $f \neq g$, existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, y por lo tanto
$$\rho_u(f, g) \geq d'(f(x_0), g(x_0)) > 0.$$
2. $\rho_u(f, g) = \rho_u(g, f)$ es fácil de verificar ya que
$$d'(f(x), g(x)) = d'(g(x), f(x))$$
para todo $x \in X$.

3. Si $f, g, h \in C(X, Y)$, entonces, para cada $x \in X$,
$$d'(f(x), g(x)) \leq d'(f(x), h(x)) + d'(h(x), g(x)),$$
y por lo tanto
$$\begin{aligned}\sup_{x\in X} d'(f(x), g(x)) &\leq \sup_{x\in X} \big(d'(f(x), h(x)) + d'(h(x), g(x))\big)\\ &= \sup_{x\in X} d'(f(x), h(x)) + \sup_{x\in X} d'(h(x), g(x)).\end{aligned}$$

La métrica ρ_u es llamada la *métrica uniforme.*

Teorema 4.23. *El espacio métrico $(C(X, Y), \rho_u)$ es completo si el espacio Y es completo.*

Demostración. La demostración de este teorema es muy similar a la demostración de la completitud de $C([0, 1])$ (teorema 2.20). Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $C(X, Y)$. Mostraremos que esta sucesión converge. Primero, para cada $x \in X$, $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en Y y, como Y es completo, converge. Definimos entonces la función $F : X \to Y$ por
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$
Al igual que en la demostración del teorema 2.20, es necesario demostrar dos cosas:

1. (f_n) converge a F uniformemente.
2. $F \in C(X, Y)$, es decir, F es continua y acotada en X.

Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $N > 0$ tal que, si $n, m \geq N$, entonces
$$\rho_u(f_n, f_m) < \varepsilon/2,$$
es decir,
$$d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2 \text{ para todo } x \in X.$$
Mostraremos que
$$d'(f_n(x), F(x)) < \varepsilon \tag{4.2}$$
para todo $x \in X$, si $n \geq N$.

Sea $x_0 \in X$. Como la sucesión $(f_n(x_0))$ converge a $F(x_0)$, existe un $N_0 > 0$ tal que
$$d'(f_n(x_0), F(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$$
para todo $n \geq N_0$ (N_0 depende de x_0, pero ésto no será ningún problema ya que N es independiente de x_0). Ahora bien, escogemos un entero n_0 tal que $n_0 > \max\{N, N_0\}$. Tenemos que, si $n \geq N$,
$$\begin{aligned}d'(f_n(x_0), F(x_0)) &\leq d'(f_n(x_0), f_{n_0}(x_0)) + d'(f_{n_0}(x_0), F(x_0))\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Como x_0 es arbitrario, hemos demostrado la desigualdad (4.2). Como N no depende de x_0, podemos concluír que (f_n) converge uniformemente a F.

Para demostrar que $F \in C(X,Y)$, tenemos que mostrar que F es continua y acotada. La demostración que F es continua es muy similar a la demostración que L es continua en el teorema 2.20, por lo que dejamos esta parte como ejercicio (ejercicio 9). Para verificar que es acotada, notemos que la sucesión (f_n) es de Cauchy y por lo tanto acotada en $C(X,Y)$. Es decir, existen $f \in C(X,Y)$ y $M > 0$ tales que $\rho_u(f_n, f) < M$ para todo n. Como (f_n) converge uniformemente a F, podemos encontrar un entero N tal que

$$d'(f_N(x), F(x)) < 1$$

para todo $x \in X$. Entonces, para $x \in X$,

$$d'(F(x), f(x)) \leq d'(F(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f(x)) < 1 + M.$$

Ahora bien, f es acotada, por lo que existen $M' > 0$ y $y_0 \in Y$ tales que

$$d'(f(x), y_0) < M'$$

para todo $x \in X$. Entonces

$$d'(F(x), y_0) \leq d'(F(x), f(x)) + d'(f(x), y_0) < 1 + M + M',$$

para todo $x \in X$, por lo que podemos concluír que F es acotada. Entonces $f_n \to F$ en $C(X,Y)$. □

Si $(Y, ||\cdot||_Y)$ es un espacio normado, entonces podemos definir las operaciones suma y multiplicación escalar en $C(X,Y)$ como

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \quad f, g \in C(X,Y),\ x \in X\\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x), \quad f \in C(X,Y),\ x \in X.\end{aligned}$$

Con estas operaciones, $C(X,Y)$ es un espacio vectorial, y se puede normar con

$$||f||_u = \sup_{x \in X} ||f(x)||_Y, \quad f \in C(X,Y). \tag{4.3}$$

Dejamos como ejercicio verificar que (4.3) define una norma. Además,

$$\rho_u(f,g) = ||f-g||_u.$$

Por el teorema 4.23 concluímos que, si $(Y, ||\cdot||_Y)$ es un espacio de Banach, entonces $(C(X,Y), ||\cdot||_u)$ es también un espacio de Banach. Podemos entonces extender el criterio M de Weierstrass a funciones que toman valores en espacios de Banach.

Corolario 4.24 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones en $C(X,Y)$, donde $(Y, ||\cdot||_Y)$ es un espacio de Banach. Si existe* *una sucesión* (M_n) *de números nonegativos tales que* $||f_n(x)||_Y \leq M_n$ *,para todo* $x \in X$*, y la serie* $\sum M_n$ *converge, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge absoluta y uniformemente en $C(X, Y)$*.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración del corolario 2.26 y la dejamos como ejercicio (ejercicio 11). □

3. El teorema de Arzelà-Ascoli

En esta sección clasificaremos los subespacios compactos de $C(X, Y)$, donde X es compacto y $Y = \mathbb{R}^l$. Cuando X no es compacto esta tarea es más dificil, y estudiaremos el caso cuando X es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^l$ en la siguiente sección. Por ahora, asumiremos que el espacio métrico (X, d) es compacto.

Primero haremos notar que, en general, $C(X, Y)$ no es compacto.

Ejemplo 4.25. Si Y no es acotado, entonces $C(X, Y)$ no es acotado, como lo muestra fácilmente la colección de funciones constantes $\{f_y\}_{y \in Y}$, donde $f_y(x) = y$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 4.26. Si Y es acotado, entonces $C(X, Y)$ es también acotado. Sin embargo, ni siquiera cuando Y es compacto $C(X, Y)$ es compacto. Considere el espacio $C([0, 1], [0, 1])$ y la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Véase la figura 4. Esta sucesión no puede tener subsucesiones convergentes, como vimos en el ejemplo 3.28. Entonces $C([0, 1], [0, 1])$ no es secuencialmente compacto, y por lo tanto no es compacto.

Por el teorema 3.25 los subespacios compactos de $C(X, Y)$ son aquéllos que son cerrados y totalmente acotados en $C(X, Y)$, por lo que son éstos los conjuntos que tenemos que clasificar. Para ésto necesitaremos del concepto de equicontinuidad, definido a continuación.

Definición 4.27. Sea $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una familia *equicontinua en* $x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

para todo $f \in \mathcal{F}$. El número δ depende de x_0 y de la familia $\mathcal{F}$, pero es independiente de las funciones $f \in \mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es *equicontinua en* X si es equicontinua en cada punto de X.

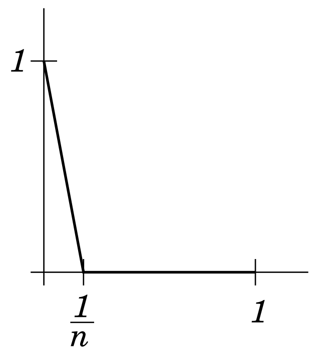

Figura 4. Las funciones f_n.

Equicontinuidad es una condición necesaria para que una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ pueda ser un espacio compacto, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.28. *Sea $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$. Si la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada, entonces es equicontinua en X.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Debemos mostrar que existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

para toda $f \in \mathcal{F}$, y que esta δ no depende de f, sólo de x_0.

Como $\mathcal{F}$ es un conjunto totalmente acotado, existen funciones

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X,Y)$$

(no necesariamente en $\mathcal{F}$, aunque esto es irrelevante) tales que

$$\mathcal{F} \subset B_{\varepsilon/3}(f_1) \cup B_{\varepsilon/3}(f_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/3}(f_n).$$

Además, como cada f_i es continua en x_0, $i = 1, 2, \ldots, n$, existen $\delta_i > 0$ tales que, para cada i,

$$f_i(B_{\delta_i}(x_0)) \subset B_{\varepsilon/3}(f(x_0)).$$

Escogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, y mostraremos que

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

para cada $f \in \mathcal{F}$. Así que sean $f \in \mathcal{F}$ y $x \in B_\delta(x_0)$. Queremos mostrar la desigualdad $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Como $\mathcal{F} \subset B_{\varepsilon/3}(f_1) \cup B_{\varepsilon/3}(f_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/3}(f_n)$, $f \in B_{\varepsilon/3}(f_i)$ para algún i_0, es decir

$$d'(f(y), f_{i_0}(y)) < \varepsilon/3$$

para todo $y \in X$. Además $d'(f_{i_0}(x), f_{i_0}(x_0)) < \varepsilon/3$, ya que $d(x, x_0) < \delta \leq \delta_{i_0}$. Entonces

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(x_0)) &\leq d'(f(x), f_{i_0}(x)) + d'(f_{i_0}(x), f_{i_0}(x_0)) + d'(f_{i_0}(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Es preciso notar que en esta demostración no hemos utilizado la compacidad de X, por lo que la proposición 4.28 es cierta también cuando X no es compacto.

Decimos que la familia $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es *uniformemente acotada* si el conjunto $\mathcal{F}$ es acotado en $C(X, Y)$. $\mathcal{F}$ es *acotada punto por punto* si, para cada $x \in X$, el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado en Y.

Es claro que si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, entonces es acotada punto por punto. Sin embargo, la inversa no es cierta, como lo demuestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.29. Considere las funciones $f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n-1 \\ n(x-(n-1)) & \text{si } n-1 \leq x < n \\ -n(x-(n+1)) & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{si } n+1 \leq x. \end{cases}$$

Esta colección es acotada punto por punto, ya que si $x \in (N-1, N]$, entonces $\{f_n(x)\}$ es acotado por arriba por N. Sin embargo, como $f_N(N) = N$, $\{f_n\}$ no es uniformemente acotada (figura 5).

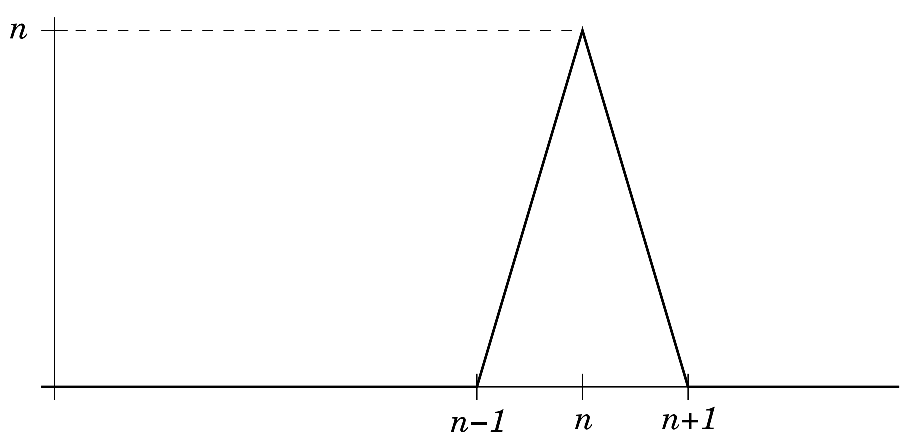

Figura 5. Las funciones f_n.

Ejemplo 4.30. Aún siendo el dominio compacto, es posible encontrar una familia acotada punto por punto pero no uniformemente acotada. Considere la sucesión de funciones $g_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ dada por

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}) \\ n(2nx-1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}) \\ -n(2nx-3) & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{3}{2n}) \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{3}{2n}, 1]. \end{cases}$$

Esta familia es acotada punto por punto porque, para cada x, $g_n(x) \to 0$. Sin embargo, como $g_N(1/N) = N$, esta familia no es uniformemente acotada. Véase la figura 6.

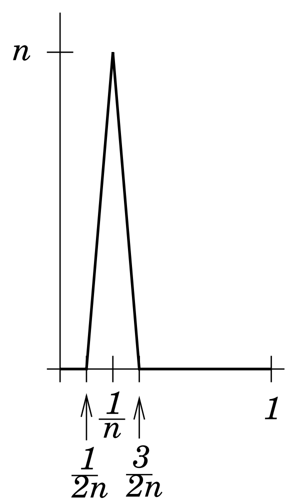

Figura 6. Las funciones g_n.

Sin embargo, si la familia es equicontinua, la inversa es cierta.

Lema 4.31. *Si la familia $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ es equicontinua y acotada punto por punto, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.*

Recuerde que asumimos la compacidad de X.

Demostración. Para mostrar que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, tenemos que encontrar $F \in C(X,Y)$ y $M > 0$ tales que $\rho_u(f,F) < M$ para toda función $f \in \mathcal{F}$.

Por equicontinuidad, para cada $x \in X$, existe un $\delta_x > 0$ tal que

$$f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_1(f(x))$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Como X es compacto, podemos encontrar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$X \subset B_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup B_{\delta_{x_2}}(x_2) \cup \ldots \cup B_{\delta_{x_n}}(x_n).$$

Pero cada conjunto $\{f(x_i) : f \in \mathcal{F}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es acotado en Y, por lo que existen puntos $y_i \in Y$ y $M_i > 0$ tales que, para toda $f \in \mathcal{F}$,

$$d'(f(x_i), y_i) < M_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Definimos entonces la función constante $F(x) = y_1$, y el número

$$M = \text{máx}\{M_1, M_2, \ldots, M_n, d'(y_2, y_1), \ldots, d'(y_n, y_1)\}.$$

Sean $x \in X$ y $f \in \mathcal{F}$, y estimaremos $d'(f(x), F(x))$. Primero, escogemos x_i tal que $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Entonces, por el hecho de que $f(B_{\delta_{x_i}}(x_i)) \subset B_1(f(x_i))$,

$$\begin{aligned} d'(f(x), F(x)) &\leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), y_i) + d'(y_i, F(x)) \\ &< 1 + M_i + d'(y_i, y_1) \leq 1 + 2M. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho_u(f, F) \leq 2M + 1$ y la familia $\mathcal{F}$ es acotada. □

Casi estamos listos para mostrar el teorema de Arzelà-Ascoli, el cual clasificará los subespacios compactos de $C(X, \mathbb{R}^l)$. Antes mostraremos el siguiente lema, que concierne a familias uniformemente acotadas en $C(X, \mathbb{R}^l)$.

Lema 4.32. *Sea $\mathcal{F}$ una familia uniformemente acotada en $C(X, \mathbb{R}^l)$. Entonces existe un conjunto compacto F en $\mathbb{R}^l$ tal que $f(X) \subset F$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, existe una función $f_0 \in C(X, \mathbb{R}^l)$ y un número $M > 0$ tales que

$$\rho_u(f, f_0) < M$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Pero X es compacto, por lo que también f_0 es compacto, y por el teorema de Heine-Borel es acotado, es decir, existe $N > 0$ tal que $|f_0(x)| < N$ para todo $x \in X$. Por lo tanto

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)| < M + N$$

para toda $f \in \mathcal{F}$ y $x \in X$. Por lo tanto $f(X) \subset B_{M+N}(0)$ en $\mathbb{R}^l$, y podemos tomar $F = \bar{B}_{M+N}(0)$, el cual es compacto en $\mathbb{R}^l$ por el teorema de Heine-Borel. □

Teorema 4.33 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones en el espacio $C(X, \mathbb{R}^l)$, donde el espacio métrico (X, d) es compacto. Entonces $\mathcal{F}$ es compacto si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrado en $C(X, \mathbb{R}^l)$, equicontinuo y acotado punto por punto.*

Demostración. Ya hemos visto que cerrado, equicontinuo y acotado punto por punto son condiciones necesarias (corolario 3.25 y proposición 4.28) para que $\mathcal{F}$ sea compacto. Para demostrar que tales condiciones son suficientes, es suficiente con demostrar, por el corolario 3.25, que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$. Mostraremos que podemos cubrir $\mathcal{F}$ con un número finito de bolas en $C(X, \mathbb{R}^l)$ de radio ε.

Los lemas 4.31 y 4.32 nos permiten concluír que existe un conjunto compacto F en $\mathbb{R}^l$ tal que $f(X) \subset F$ para toda función $f \in \mathcal{F}$. Además, por la equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ y la compacidad de X podemos escoger bolas $B_{\delta_i}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que

$$X \subset B_{\delta_1}(x_1) \cup B_{\delta_2}(x_2) \cup \ldots \cup B_{\delta_n}(x_n)$$

y

$$f(B_{\delta_i}(x_i)) \subset B_{\varepsilon/5}(f(x_i)), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Como F es compacto, podemos encontrar puntos $y_1, y_2, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^l$ tales que

$$F \subset B_{\varepsilon/5}(y_1) \cup B_{\varepsilon/5}(y_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/5}(y_k).$$

Tenemos las siguientes observaciones:

A: Si $f \in \mathcal{F}$, entonces, para cada i, existe un entero $j(f,i)$, $1 \leq j(f,i) \leq k$, tal que

$$f(x_i) \in B_{\varepsilon/5}(y_{j(f,i)}).$$

De esta forma cada $f \in \mathcal{F}$ induce (al menos) una función $j(f,\cdot)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, \ldots, k\}$.

B: Si $f, g \in \mathcal{F}$ inducen la misma función $j(i)$, entonces, si $x \in B_{\delta_{i_0}}(x_{i_0})$,

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - y_{j(i_0)}| + |y_{j(i_0)} - g(x_{i_0})| \\ &\quad + |g(x_{i_0}) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5},\end{aligned}$$

por lo que $\rho_u(f,g) \leq \dfrac{4\varepsilon}{5} < \varepsilon$.

Ahora consideremos una función arbitraria $j : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Si existe alguna $f \in \mathcal{F}$ tal que $j(\cdot) = j(f, \cdot)$, a ésta le llamaremos f_j. Sea entonces J el conjunto de todas las funciones j tales que f_j existe. El conjunto J es finito, por lo que el conjunto de funciones $\{f_j\}_{j \in J}$ también es finito. Demostraremos que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j \in J} B_\varepsilon(f_j),$$

donde $B_\varepsilon(f_j)$ es la bola en $C(X, \mathbb{R}^l)$ de radio ε con centro en f_j. Si $f \in \mathcal{F}$, entonces induce $j(f, \cdot)$, por la observación A. Entonces, por B,

$$\rho_u(f, f_{j(f,\cdot)}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $f \in B_\varepsilon(f_{j(f,\cdot)})$. □

Podemos reescribir el teorema de Arzelá-Ascoli de la siguiente manera.

Corolario 4.34. *Sea (f_n) una sucesión en $C(X, \mathbb{R}^l)$, donde (X, d) es compacto y la familia $\{f_n\}$ es equicontinua y acotada punto por punto. Entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge en $C(X, \mathbb{R}^l)$.*

Demostración. Por el teorema de Arzelá-Ascoli, la cerradura de $\{f_n\}$ es compacta, y el corolario sigue por el teorema de Bolzano-Weierstrass. □

Versiones más generales del teorema de Arzelà-Ascoli pueden ser encontradas en textos de topología, como por ejemplo en [4, Teorema 6.1].

3.1. Sucesiones de funciones en $\mathbb{R}^m$. El teorema de Arzelá-Ascoli clasifica los subespacios compactos del espacio $C(X, \mathbb{R}^l)$ sólo cuando X es compacto, y hemos visto ejemplos donde se concluye que la compacidad del dominio es necesaria.

Sin embargo, el corolario 4.34 se puede modificar de la siguiente manera, la cual es de hecho la versión más útil de los resultados anteriores.

Teorema 4.35. *Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$, y (f_n) una sucesión de funciones continuas en Ω (no necesariamente acotadas) equicontinua y acotada punto por punto. Entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Es decir, existe una subsucesión (f_{n_k}) y una función f, continua en Ω, tal que, para todo compacto $F \subset \Omega$, $f_{n_k} \to f$ en $C(F, \mathbb{R}^l)$.*

Cuando decimos $f_{n_k} \to f$ *en* $C(F, \mathbb{R}^l)$, queremos decir que la sucesión de restricciones $(f_{n_k}|_F)$ converge a la restricción $f|_F$ en $C(F, \mathbb{R}^l)$.

Demostración. Por la proposición 3.27, podemos encontrar una sucesión creciente de conjuntos compactos F_k tal que

$$\Omega = \bigcup_k F_k,$$

y todo compacto F contenido en Ω está contenido en algún F_k. Por el corolario 4.34, existe una subsucesión de (f_n), a la que llamaremos $(f_{n_p^1})_{p=1}^{\infty}$, que converge en $C(F_1, \mathbb{R}^l)$. Podemos utilizar este mismo corolario para encontrar una subsucesión de $(f_{n_p^1})_{p=1}^{\infty}$, a la cual llamamos $(f_{n_p^2})_{p=1}^{\infty}$, la cual converge en $C(F_2, \mathbb{R}^l)$. Inductivamente construímos sucesiones $(f_{n_p^k})_{p=1}^{\infty}$, cada una subsucesión de $(f_{n_p^{k-1}})_{p=1}^{\infty}$, $k = 2, 3, \ldots$, que convergen en $C(F_k, \mathbb{R}^l)$, para cada k.

$$\begin{array}{cccc} f_{n_1^1} & f_{n_2^1} & f_{n_3^1} & \cdots \\ f_{n_1^2} & f_{n_2^2} & f_{n_3^2} & \cdots \\ f_{n_1^3} & f_{n_2^3} & f_{n_3^3} & \cdots \\ \vdots & & & \end{array}$$

Consideremos ahora la sucesión *diagonal* $f_{n_p} = f_{n_p^p}$, $p = 1, 2, \ldots$. Esta sucesión es subsucesión de cada una de las $(f_{n_p^k})_{p=1}^{\infty}$, y por lo tanto converge en $C(F_k, \mathbb{R}^l)$, para cada k. Como $\Omega = \bigcup_k F_k$, podemos definir en Ω la función

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x).$$

Entonces f es continua en Ω. Si F es un conjunto compacto contenido en Ω, entonces está contenido en algún F_k, y por lo tanto, como $f_{n_p} \to f$ en $C(F_k, \mathbb{R}^l)$, $f_{n_p} \to f$ en $C(F, \mathbb{R}^l)$. □

4. El teorema de Stone-Weierstrass

En esta sección demostraremos el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass, el cual enlista familias de funciones *densas* en $C(X) = C(X, \mathbb{R})$. Este teorema, al igual que el de Arzelà-Ascoli estudiado en la sección anterior, también se refiere a conjuntos compactos X.

Recordemos que A es denso en un espacio métrico X si $\overline{A} \supset X$. Ésto es equivalente a decir que A es denso en X si, para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, la bola $B_\varepsilon(x)$ interseca al conjunto A; es decir, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$.

Consideremos ahora el caso $C([a, b])$, el espacio de funciones continuas reales en $[a, b]$, y $\mathcal{P}$, el conjunto de las funciones polinomiales. La versión clásica del teorema de aproximación de Weierstrass es la siguiente:

Teorema 4.36 (Weierstrass)**.** *$\mathcal{P}$ es denso en $C([a, b])$.*

Aunque ahora existen muchas demostraciones de este teorema, las más famosas dadas por Bernstein[1] o Lebesgue[2], aquí daremos la demostración originalmente dada por Weierstrass en 1885 [7].

Consideremos la función

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

[1]La demostración de Bernstein es constructiva. De hecho, si $[a, b] = [0, 1]$, Bernstein demostró que la sucesión de polinomios (ahora llamados *polinomios de Bernstein*)

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

converge uniformemente a f. Véase por ejemplo [5, Capítulo1].

[2]La demostración de Lebesgue consiste, primero, de aproximar uniformemente con polinomios la función $|\cdot|$ en $[-1, 1]$ y, luego, de observar que las funciones *poligonales* son densas en $C([a, b])$. Este trabajo, de hecho, fue la primera publicación de Lebesgue [3].

Esta función es positiva y su integral (impropia) sobre $\mathbb{R}$ converge y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi = \sqrt{\pi}.$$

Además, tenemos el siguiente lema.

Lema 4.37. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua, acotada y, para cada $r > 0$, definimos*

$$F(x, r) = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\Big(\frac{u-x}{r}\Big)du.$$

Entonces $\lim_{r\to 0} F(x, r) = f(x)$ uniformemente en x; es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\bar{r} > 0$ tal que, si $0 < r < \bar{r}$ entonces

$$\big|F(x, r) - f(x)\big| < \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $\delta > 0$, escribimos

$$\begin{aligned}
F(x, r) - f(x) &= \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\Big(\frac{u-x}{r}\Big)du - f(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+ru)\psi(u)du - f(x)\cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x+ru) - f(x)\big)\psi(u)du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|>\frac{\delta}{r}} \big(f(x+ru) - f(x)\big)\psi(u)du \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|\le\frac{\delta}{r}} \big(f(x+ru) - f(x)\big)\psi(u)du.
\end{aligned}$$

Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $\int_{-\infty}^{\infty} \psi$ converge, existe $N > 0$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|>N} \psi(u)du < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ (independiente de x) tal que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Tomamos entonces $\bar{r} > 0$ tal que $\bar{r} < \delta/N$. Entonces, si $0 < r < \bar{r}$,

$$\begin{aligned}\big|F(x,r) - f(x)\big| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|>\frac{\delta}{r}} \big|f(x+ru) - f(x)\big|\psi(u)du \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|\leq\frac{\delta}{r}} \big|f(x+ru) - f(x)\big|\psi(u)du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|>N} 2M\psi(u)du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|u|\leq\frac{\delta}{r}} \frac{\varepsilon}{2}\psi(u)du \\ &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(u)du = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Demostración del teorema 4.36: Sea $f \in C([a,b])$ y $\varepsilon > 0$. Escogemos $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c < a$ y $d > b$. Escogemos ahora una función continua $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que coincide con f en $[a,b]$ y es cero afuera de $[c,d]$. Por ejemplo, podemos tomar

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ f(a)\dfrac{x-c}{a-c} & \text{si } c \leq x < a \\ f(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ f(b)\dfrac{d-x}{d-b} & \text{si } b < x \leq d \\ 0 & \text{si } x > d. \end{cases}$$

(Véase la figura 7.) Entonces, si como en el lema anterior definimos

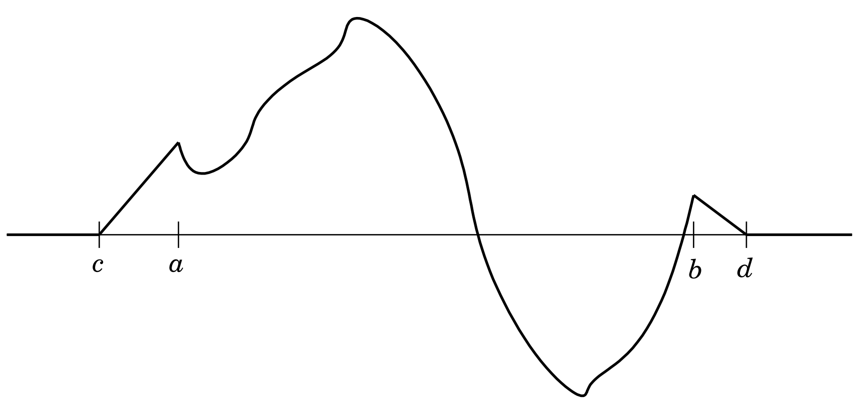

Figura 7. La función f en $[a,b]$ extendida a $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}$.

$$F(x,r) = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)\psi\Big(\frac{u-x}{r}\Big)du = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int_{c}^{d} \tilde{f}(u)\psi\Big(\frac{u-x}{r}\Big)du,$$

entonces existe r_0 tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x, r_0) - \tilde{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora bien, si hacemos $g_u(x) = \psi\Big(\dfrac{u-x}{r_0}\Big)$, no es muy difícil ver que la serie de Taylor de g_u converge a g_u,

$$g_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi^{(n)}(u/r_0)}{n! r_0^n} x^n$$

uniformemente en x y en u sobre cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Si $M = \max|\tilde{f}|$, entonces existe N_0 tal que, para todo $x, u \in [c, d]$,

$$\Big|\psi\Big(\frac{u-x}{r_0}\Big) - \sum_{n=0}^{N_0} \frac{(-1)^n \psi^{(n)}(u/r_0)}{n! r_0^n} x^n\Big| < \frac{r_0\sqrt{\pi}}{2M(d-c)}\varepsilon,$$

por lo que si hacemos

$$P(x) = \frac{1}{r_0\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{(-1)^n}{n! r_0^n} x^n \int_c^d f(u)\psi^{(n)}(u/r_0)du,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
|F(x, r_0) - P(x)| &= \frac{1}{r_0\sqrt{\pi}}\Big|\int_c^d \tilde{f}(u)\Big(\psi\Big(\frac{u-x}{r}\Big) - \sum_{n=0}^{N_0} \frac{(-1)^n \psi^{(n)}(\frac{u}{r_0})}{n! r_0^n} x^n\Big)du\Big| \\
&< \frac{1}{r_0\sqrt{\pi}} \int_c^d |\tilde{f}(u)| \frac{r_0\sqrt{\pi}}{2M(d-c)} \varepsilon du \le \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

para todo $x \in [c, d]$. Esto implica que

$$|\tilde{f}(x) - P(x)| \le |\tilde{f}(x) - F(x, r_0)| + |F(x, r_0) - P(x)| < \varepsilon$$

para $x \in [c, d]$ y, como $f \equiv \tilde{f}$ en $[a, b]$, tenemos que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in [a, b]$, donde P es un polinomio en x. □

Corolario 4.38. *$C([a, b])$ es separable.*

Demostración. Sea

$$M = \max\{1, |a|, |b|, |a^2|, |b^2|, \ldots, |a^n|, |b^n|\}.$$

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ es un polinomio y $\varepsilon > 0$, sean $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$|a_i - r_i| \le \frac{\varepsilon}{nM}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

y $p_0(x) = r_0 + r_1 x + \ldots + r_n x^n$. Entonces, para $x \in [a, b]$),

$$|p(x) - p_0(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} ||a_i - r_i||x^n| < \varepsilon.$$

Esto implica que el conjunto de polinomios con coeficientes racionales $\mathcal{P}_Q$ es denso en $\mathcal{P}$, y por lo tanto denso en $C([a, b])$. Como $\mathcal{P}_Q$ es contable, $C([a, b])$ es separable. □

El teorema de Stone-Weierstrass ofrece una generalización a este resultado, donde consideramos un espacio compacto X general. En este caso, en lugar de las funciones polinomiales, consideraremos una familia $\mathcal{A}$ de funciones con las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{A}$ es un *álgebra*, es decir, es un subespacio vectorial de $C(X)$ cerrado bajo multiplicación: si $f, g \in \mathcal{A}$, entonces $fg \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ *separa puntos* en X: para $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.
3. $\mathcal{A}$ contiene las funciones constantes.

Teorema 4.39 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones continuas en X que separa puntos y contiene las funciones constantes. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C(X)$.*

Demostraremos que la cerradura $\bar{\mathcal{A}} = C(X)$. Para esto, primero demostraremos que $\bar{\mathcal{A}}$ satisface las tres propiedades mencionadas anteriormente. Es obvio que satisface las últimas dos, puesto que $\bar{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$. Para verificar que es un álgebra, tenemos que mostrar que si $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$ entonces $f + g$ y fg están en $\bar{\mathcal{A}}$.

Para $\varepsilon > 0$, existen $f', g' \in \mathcal{A}$ tales que

$$||f - f'|| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad ||g - g'|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, $||(f + g) - (f' + g')|| < \varepsilon$. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra, $f' + g' \in \mathcal{A}$; como ε es arbitrario, $f + g \in \bar{\mathcal{A}}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $M = \max |f|$ y escogemos $g'' \in \mathcal{A}$ tal que

$$||g - g''|| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ahora bien, sea $M' = \max |g''|$, y tomamos $f'' \in \mathcal{A}$ tal que

$$||f - f''|| < \frac{\varepsilon}{2M'}.$$

Entonces, $f'' \cdot g'' \in \mathcal{A}$ y

$$||fg - f''g''|| = ||fg - fg'' + fg'' - f''g''|| \leq M||g - g''|| + ||f - f''||M' < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, $fg \in \bar{\mathcal{A}}$.

Separaremos la demostración del teorema de Stone-Weierstrass en tres lemas. Los dos primeros se refieren a álgebras cerradas en $C(X)$, y la compacidad de X no es necesaria.

Lema 4.40. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra cerrada en $C(X)$. Entonces, si $f \in \mathcal{A}$, entonces $|f| \in \mathcal{A}$.*

Con $|f|$ nos referimos a la función $|f|(x) = |f(x)|$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para $M = \sup_X |f|$, tomamos un polinomio p tal que

$$\big||x| - p(x)\big| < \varepsilon \qquad \text{para } x \in [-M, M].$$

Tal polinomio existe por el teorema de Weierstrass. Entonces, como $f(x) \in [-M, M]$ para todo $x \in X$, tenemos que

$$\big||f(x)| - p(f(x))\big| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$. La función $p \circ f \in \mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es un álgebra. Como ε es arbitrario y $\mathcal{A}$ es cerrada, $|f| \in \mathcal{A}$. □

Lema 4.41. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra cerrada en $C(X)$, entonces, si $f, g \in \mathcal{A}$, $\text{máx}(f, g), \text{mín}(f, g) \in \mathcal{A}$.*

Con $\text{máx}(f, g)$ nos referimos a la función

$$\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\},$$

y similarmente para $\text{mín}(f, g)$. Es fácil ver que estas dos funciones son continuas también (ejercicio 16). Un subconjunto S de $C(X)$ con la propiedad de que si $f, g \in S$ entonces $\text{máx}(f, g), \text{mín}(f, g) \in S$ es llamado un *latiz*. Entonces, el lema 4.41 implica que toda álgebra cerrada en $C(X)$ es un latiz.

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente del lema 4.40, ya que

$$\text{máx}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$
$$\text{mín}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

□

Es claro que, recursivamente, si $\mathcal{A}$ es un latiz y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\text{máx}\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{A}$$

y

$$\text{mín}\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{A}.$$

Casi estamos listos para la demostración del teorema. Antes, demostraremos un lema referente a latices cerrados en $C(X)$. Es aquí donde la compacidad de X es necesaria.

Lema 4.42. *Sea $\mathcal{A}$ un latiz cerrado en $C(X)$ y X compacto, y sea $f \in C(X)$. Si para cada $x, y \in X$ existe $g_{xy} \in \mathcal{A}$ tal que*

$$g_{xy}(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad g_{xy}(y) = f(y),$$

entonces $f \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Demostraremos que existe $g \in \mathcal{A}$ tal que, para $x \in X$, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado, esto implica que $f \in \mathcal{A}$.

Dado $y \in X$, para cada $x \in X$ escogemos $g_{xy} \in \mathcal{A}$ como en la hipótesis. Como f y cada g_{xy} son continuas, existen abiertos U_x tales que

$$g_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$$

para $z \in U_x$. Claramente $x \in U_x$, por lo que $\{U_x\}_{x \in X}$ es una cubierta para X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Si tomamos

$$g_y = \max\{g_{x_1 y}, \ldots, g_{x_n y}\},$$

entonces $g_y \in \mathcal{A}$ y $g_y(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in X$.

Ahora bien, para cada $y \in X$, consideramos la función (continua) g_y, y tomamos abiertos V_y tales que, si $z \in V_y$, entonces

$$g_y(z) < f(z) + \varepsilon.$$

De nuevo, $y \in V_y$, así que $\{V_y\}_{y \in X}$ forma una cubierta de X. Si

$$\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_m}\}$$

es una subcubierta finita, tomamos

$$g = \min\{g_{y_1}, \ldots, g_{y_m}\}.$$

Entonces $g \in \mathcal{A}$ y, para todo $z \in X$, $g(z) < f(z) + \varepsilon$. Tenemos entonces que, para $z \in X$,

$$-\varepsilon < g(z) - f(z) < \varepsilon,$$

por lo que $|g(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in X$. $\square$

Demostración del teorema de Stone-Weierstrass: Dada una función $f \in C(X)$, demostraremos que, para cada $x, y \in X$, existe $g \in \bar{\mathcal{A}}$ tal que $g(x) = f(x)$ y $g(y) = f(y)$. El teorema entonces quedará demostrado por los lemas 4.41 y 4.42.

Sean $x, y \in X$ y tomamos $h \in \bar{\mathcal{A}}$ tal que $h(x) \neq h(y)$. Tal función existe porque $\bar{\mathcal{A}}$ separa puntos. Definimos ahora $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{h(y) - h(x)}\big(h - h(x)\big).$$

Como $\bar{\mathcal{A}}$ es un álgebra y contiene a las constantes, $g \in \bar{\mathcal{A}}$. Finalmente, observamos que $g(x) = f(x)$ y $g(y) = f(y)$. □

Hemos asumido que el álgebra $\mathcal{A}$ separa puntos y contiene a las funciones constantes. Es claro ver que la primera de estas hipótesis es necesaria porque, si $\mathcal{A}$ no separara puntos bien podría contener sólo a la función cero. Un ejemplo no trivial de un álgebra que no separa puntos es el conjunto de las funciones pares en $[-a, a]$. Es claro que esta álgebra es cerrada y, definitivamente, no es todo $C([-a, a])$.

Sobre la última de estas hipótesis, si $\mathcal{A}$ no contiene a todas las funciones constantes, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{A}$. Véase, por ejemplo, [2, Sección 4.7].

Ejemplo 4.43 (Polinomios trigonométricos)**.** Sea $\mathbb{T}$ el círculo de radio 1, con centro en 0, en $\mathbb{R}^2$, y consideremos el espacio $C(\mathbb{T})$ de funciones continuas en $\mathbb{T}$. Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces la función $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

es continua en $[0, 2\pi]$, con $g(0) = g(2\pi)$. De manera inversa, si $g \in C([0, 2\pi])$ y $g(0) = g(2\pi)$, podemos definir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ por

$$f(\cos t, \operatorname{sen} t) = g(t),$$

y f es continua en $\mathbb{T}$. Esto nos permite identificar $C(\mathbb{T})$ con el subespacio de $C([0, 2\pi])$ de funciones continuas g con $g(0) = g(2\pi)$.

Un *polinomio trigonométrico* es una función $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de la forma

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\big).$$

Es claro que $T \in C(\mathbb{T})$. Si $\mathcal{T}$ es el conjunto de polinomios trigonométricos en $[0, 2\pi]$, entonces $\mathcal{T}$ es denso en $C(\mathbb{T})$.

Para ver esto, verificaremos que $\mathcal{T}$ satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Primero, es claro que $\mathcal{T}$ contiene a las funciones constantes y que separa puntos. Para verificar que $\mathcal{T}$ es un álgebra, sólo tenemos que verificar que es ceerado bajo productos, porque es claro que es un espacio vectorial. Sin embargo,

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}\big(\cos(n-m) + \cos(n+m)\big)$$

$$\cos nx \operatorname{sen} mx = \frac{1}{2}()$$

$$\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx = \frac{1}{2}\big(\cos(n-m) + \cos(n+m)\big)$$

Se pueden encontrar generalizaciones y más aplicaciones del teorema de Stone-Weierstrass en los artículos [6].

Ejercicios

1. Demuestre que $f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, para todo conjunto F cerrado en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.
2. Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, y $f : X \to Y$. Recuerde que si $A \subset X$ y $B \subset Y$, los conjutos imagen de A y preimagen de B se definen como
$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \in Y : x \in A\} \\ f^{-1}(B) &= \{x \in X : f(x) \in B\}. \end{aligned}$$
Muestre las siguientes propiedades de estos conjuntos:
   - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ para $A, B \subset X$.
   - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ para $A, B \subset X$, y de un ejemplo donde $f(A \cap B) \not\supset f(A) \cap f(B)$.
   - $f(f^{-1}(A)) \subset A$ para $A \subset Y$, y de un ejemplo donde $f(f^{-1}(A)) \not\supset A$.
   - $f^{-1}(f(A)) \supset A$ para $A \subset X$, y de un ejemplo donde $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$.
3. Sean X y Y espacios métricos, A y B subconjuntos abiertos de X, y $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas tales $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Muestre que la función $h : A \cup B \to Y$ dada por
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$
es continua.
4. Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos y $f : X \to Y$. Muestre que f es continua en $x \in X$ si, y sólo si, para cada sucesión $x_n \to x$ en X tenemos que $f(x_n) \to f(x)$ en Y.
5. Utilice el ejercicio anterior para mostrar que si X es secuencialmente compacto, entonces $f(X)$ es secuencialmente compacto. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, este resultado ofrece una demostración alternativa para el teorema 4.7.
6. Sea X un espacio totalmente acotado y $f : X \to Y$ una función uniformemente continua en X. Demuestre que $f(X)$ es acotado. ¿Es $f(X)$ totalmente acotado?
7. En referencia al problema anterior, de un ejemplo de un espacio acotado X y una función uniformemente continua en X tal que su imagen no es acotada.
8. Suponga que I es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua. Muestre que f tiene un máximo y un mínimo, es decir, existen

$x_M, x_m \in I$ tales que

$$f(x_M) = \max f(I), \quad f(x_m) = \min f(I).$$

9. Muestre que la función F construída en la demostración del teorema 4.23 es continua.
10. Demuestre las observaciones hechas después de la demostración del Teorema 4.23. Es decir, si $(Y, ||\cdot||_Y)$ es una espacio normado, entonces $C(X,Y)$ se puede dotar con una estructura de espacio normado a través de las operaciones

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x) & = & f(x)+g(x), \quad f,g \in C(X,Y),\ x \in X \\ (\lambda f)(x) & = & \lambda f(x), \quad f \in C(X,Y),\ x \in X. \end{array}$$

y la norma

$$||f||_u = \sup_{x\in X} ||f(x)||_Y, \quad f \in C(X,Y).$$

11. Demuestre el corolario 4.24.
12. Determine si las siguientes colecciones de funciones son equicontinuas y/o acotadas punto por punto.
    - $\{\text{sen}(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ en $C([0,2\pi])$;
    - $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C([0,1])$;
    - $\left\{\dfrac{x^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ en $C([0,2])$.
13. Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$ y (f_n) una sucesión de funciones continuas equicontinua tal que $(f_n(x))$ converge para cada $x \in \Omega$. Demuestre que (f_n) converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.
14. Sea $K : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, y definimos $L : C[0,1] \to C[0,1]$ por

$$Lf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy,$$

como en el ejemplo 4.15. Demuestre que la imagen de la bola $B_1(0)$ en $C([0,1])$ bajo L es un conjunto compacto en $C([0,1])$.

15. Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0$$

para todo $n = 0,1,2,\ldots$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. (*Sugerencia:* Utilice el teorema de Weierstrass para demostrar que $\int_a^b f^2 = 0$.)

16. Sean $f,g \in C(X)$. Demuestre que las funciones $\max(f,g) : X \to \mathbb{R}$ y $\min(f,g) : X \to \mathbb{R}$ son continuas.

Capítulo 5

Espacios conexos

1. Conexidad

En este capítulo exploraremos el concepto de *conexidad* en un espacio métrico, y estudiaremos algunas de sus aplicaciones.

Definición 5.1. Decimos que el espacio X es *conexo* si, para todos los conjuntos abiertos U y V en X, no vacíos, tales que $X \subset U \cup V$, se tiene $U \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, X no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos disjuntos.

Si un espacio métrico X no es conexo, entonces decimos que X es *disconexo*. En tal caso, cualquier par de abiertos U, V tales que $X \subset U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$ es llamado una *separación* de X.

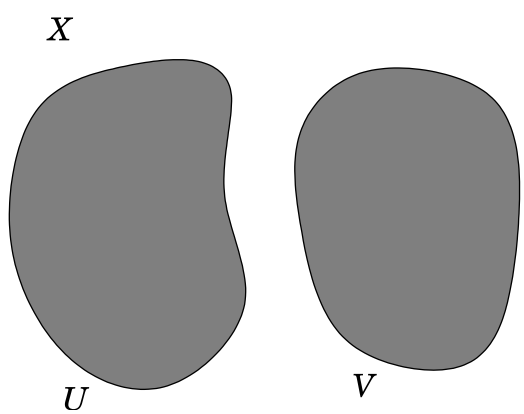

Figura 1. Diagrama simple de una separación del espacio X

Si $A \subset X$, entonces decimos que es *conexo en* X si es conexo como subespacio de X; es decir, si para cualquier par de abiertos U y V en X tales que $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \subset U \cup V$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$. De igual forma definimos una *separación de* A *en* X.

Si U y V forman una separación del espacio métrico X, entonces cada uno de ellos es abierto y cerrado en X, ya que $U = X \setminus V$ y $V = X \setminus U$, por lo que ambos son complementos de conjuntos cerrados.

Ejemplo 5.2. Un espacio discreto con al menos dos puntos es disconexo: Como todos los subconjuntos de un espacio discreto X son abiertos, una separación está dada por $U = \{x_0\}$, $V = X \setminus U$, donde $x_0 \in X$.

Ejemplo 5.3. El conjunto $\mathbb{Q}$, como subespacio de $\mathbb{R}$, es disconexo: Tomamos $U = (-\infty, \sqrt{2})$, $V = (\sqrt{2}, \infty)$; entonces $Q \cap U \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \cap V \neq \emptyset$, $Q \subset U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, porque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ejemplo 5.4. Si $A \neq \emptyset$ es conexo en $\mathbb{R}$, entonces tiene un sólo punto o es un intervalo. Si no lo fuera, entonces existirían $x < y < z$ en A tales que $x, z \in A$ y $y \notin A$. Pero entonces, como en el ejemplo anterior, los conjuntos $(-\infty, y)$ y (y, ∞) formarían una separación de A.

De manera inversa, un intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es conexo. Estableceremos este resultado como un teorema, ya que será de utilidad más adelante.

Teorema 5.5. *El intervalo* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, *es conexo.*

Demostración. Sean U y V abiertos en $\mathbb{R}$, $U \cap [a, b] \neq \emptyset$, $V \cap [a, b] \neq \emptyset$, tales que $[a, b] \subset U \cup V$, y supongamos que $a \in U$. Sea $s = \inf V \cap [a, b]$. Mostraremos primero que $s \in U$. Si $s = a$ esto es trivial, por lo que supondremos que $s > a$. Entonces $s \notin V$, porque V es abierto. Como $[a, b] \subset U \cup V$, y $s \in [a, b]$, entonces $s \in U$

Ahora bien, como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(s - \delta, s + \delta) \subset U$. Como $s = \inf V$, existe $v \in V$ tal que $s < v < s + \delta$. Entonces $v \in U \cup V$, y concluímos que $U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Intervalos semiabiertos o abiertos también son conexos, y su conexidad se demuestra de manera similar. Esto también es consecuencia de su "conexidad por trayectorias", la cual se discutirá en la siguiente sección.

Es fácil ver que la unión o la intersección de dos conjuntos conexos en un espacio métrico no son por lo general conjuntos conexos. Sin embargo, si ambos se intersecan, entonces la unión sí lo es.

Proposición 5.6. *Sean* A *y* B *conjuntos conexos en* X *tales que* $A \cap B \neq \emptyset$. *Entonces* $A \cup B$ *es conexo.*

Demostración. Sean U y V abiertos en X tales que $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, y $A \cup B \subset U \cup V$. Sea $x_0 \in A \cap B$. Entonces $x_0 \in U \cup V$, por lo que entonces tenemos que $x_0 \in U$ ó $x_0 \in V$, y entonces $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$ ó $B \cap U \neq \emptyset$ y $B \cap V \neq \emptyset$. Cualquiera de los casos implica que $U \cap V \neq \emptyset$, porque A y B son conexos. $\square$

Ahora mostraremos que la conexidad de un espacio se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 5.7. *Si X es conexo y $f : X \to Y$ es continua, entonces la imagen de f, $f(X)$, es conexo.*

Demostración. Sean U y V abiertos en Y tales que $f(X) \subset U \cup V$, $f(X) \cap U \neq \emptyset$ y $f(X) \cap V \neq \emptyset$. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X, porque f es continua, no vacíos y $X \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Como X es conexo, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Si $x_0 \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, entonces $f(x_0) \in U \cap V$, y por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$. □

1.1. El teorema del valor intermedio. Entre las consecuencias de los teoremas 5.5 y 5.7 se encuentra el Teorema del Valor Intermedio, uno de los teoremas básicos del cálculo.

Teorema 5.8 (Valor Intermedio)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, y $f(a) < y < f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.*

Demostración. $f([a, b])$ es conexo porque $[a, b]$ es conexo y f es continua. Si $f(a) < y < f(b)$ y $y \notin f([a, b])$, entonces los conjuntos $(-\infty, y)$ y (y, ∞) formarían una separación de $f([a, b])$, lo cual es una contradiccón. □

En la siguiente sección estableceremos otras consecuencias de estos dos teoremas.

2. Conexidad por trayectorias

En esta sección estudiaremos el concepto de conexidad por trayectorias, y su relación con conexidad.

Definición 5.9. Sea X un espacio métrico. Una *trayectoria en X* es una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$. Si $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$, entonces decimos que γ es una *trayectoria de a a b*.

Si γ es una trayectoria de a a b, entonces $\eta(t) = \gamma(1-t)$ es una trayectoria de b a a.

Definición 5.10. Decimos que el espacio métrico X es *conexo por trayectorias* si para cada $a, b \in X$ existe una trayectoria de a a b.

Si A es un subespacio de X, entonces A es conexo por trayectorias si, y sólo si, para cada $a, b \in A$ existe una trayectoria γ de a a b en X tal que $\gamma([0, 1]) \subset A$.

El siguiente teorema es otra consecuencia de los teoremas 5.5 y 5.7.

Teorema 5.11. *Si el espacio métrico X es conexo por trayectorias, entonces es conexo.*

Demostración. Sean U y V abiertos en X, no vacíos, tales que $X \subset U \cup V$, y sean $a \in U$ y $b \in V$. Como X es conexo por trayectorias, entonces existe una trayectoria γ de a a b. Entonces $U \cap \gamma([0,1]) \neq \emptyset$ y $V \cap \gamma([0,1]) \neq \emptyset$. Como $\gamma([0,1])$ es conexo, $U \cap V \neq \emptyset$. □

Este teorema implica, por ejemplo, que los intervalos en $\mathbb{R}$. ya sea abiertos o semiabiertos, son conexos. La conexidad en $\mathbb{R}$, y en general $\mathbb{R}^n$ será discutida con mayor extensión más adelante.

La inversa del teorema 5.11, sin embargo, es falsa.

Ejemplo 5.12. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ es conjunto dado por la unión del segmento $\{0\} \times [-1,1]$ y la imagen $f((0,1])$ de la función $f(t) = (t, \operatorname{sen}(1/t))$ (la gráfica de $\operatorname{sen}(1/t)$ en $(0,1]$; véase la figura 2). A es conexo porque es la cerradura de $f((0,1])$ (ejercicio 1), el cual es conexo porque f es continua y $(0,1]$ es conexo.

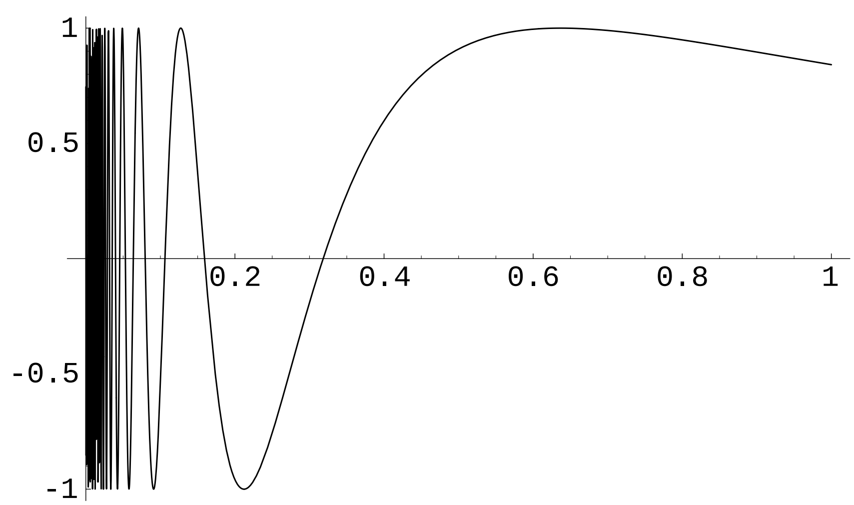

Figura 2. Gráfica de la función $\operatorname{sen} 1/t$ en $(0,1]$.

Sin embargo, A no es conexo por trayectorias: Supongamos que γ es una trayectoria del punto $(0,0)$ a, digamos, $(1/\pi, 0)$. Para $n \in \mathbb{Z}_+$, sea $t_n \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_n) = (1/n\pi, 0)$ (tal sucesión existe porque γ es continua en 0). Como $[0,1]$ es compacto, existe una subsucesión t_{n_k} que converge, digamos $t_{n_k} \to t_0 \in [0,1]$. Como $\gamma(t_n) \to (0,0)$, entonces $\gamma(t_0) = (0,0)$, porque γ es continua.

Ahora bien, podemos escribir $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, donde $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ son continuas[1]. Entonces $\gamma_1(t_{n_k}) = 1/(n_k\pi)$ y $\gamma_1(t_{n_{k+1}}) = 1/(n_{k+1}\pi)$ para

[1] De hecho, $\gamma_2(t) = \operatorname{sen}(1/\gamma_1(t))$.

cada k, y por el Teorema del Valor Intermedio existe, para cada k, s_k tal que $\gamma_1(s_k) = 2/(4m_k + 1)\pi$, donde m_k es tal que

$$n_k < \frac{4m_k + 1}{2} < n_{k+1}.$$

Entonces $s_k \to t_0$. Sin embargo, $\gamma(s_k) = (2/(2m_k + 1)\pi, 1)$, por lo que entonces $\gamma(s_k) \to (0, 1)$, contradiciendo el hecho de que es continua en t_0.

El ejemplo anterior muestra que si A es un conjunto conexo por trayectorias en X, entonces su cerradura no es necesariamente conexa (ejercicio 1).

2.1. Conjuntos convexos. Ahora consideremos un espacio normado X. Si $x, y \in X$, el *segmento de recta de x a y* es la función $\gamma : [0, 1] \to X$ dada por

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty.$$

Como γ es continua, entonces es una trayectoria de x a y, y podemos concluír entonces que X es conexo por trayectorias. Por lo tanto, es también conexo.

Corolario 5.13. *$\mathbb{R}^n$ es conexo.*

Corolario 5.14. *Si U es un conjunto abierto y cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces $U = \emptyset$ ó $U = \mathbb{R}^n$.*

Definición 5.15. Si A es un subconjunto del espacio normado X, decimos que A es convexo si, para $a, b \in A$, entonces el segmento de recta de a a b está contenido en A.

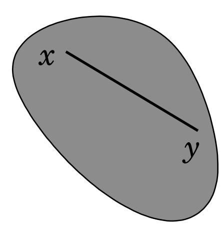

Figura 3. Un conjunto convexo. El segmento de recta de x a y está contenido en el conjunto.

Es claro que los conjuntos convexos son conexos, ya que son conexos por trayectorias.

Ejemplo 5.16. Un intervalo en $\mathbb{R}$ es convexo.

Ejemplo 5.17. Una bola $B_r(x_0)$ en un espacio normado es un conjunto convexo. Es suficiente con mostrar esto para el caso $x_0 = 0$ y $r = 1$ (ejercicio 6); es decir, tenemos que mostrar que si $||x|| < 1$ y $||y|| < 1$, entonces $||(1 - t)x + ty|| < 1$ para $t \in [0, 1]$. Pero, por la desigualdad del triángulo,

$$||(1 - t)x + ty|| \le ||(1 - t)x|| + ||ty|| = (1 - t)||x|| + t||y|| < 1 - t + t = 1.$$

Aunque la unión de dos conjuntos convexos no es necesariamente convexa, la intersección sí lo es.

Teorema 5.18. *Si A y B son conjuntos convexos en el espacio normado X, entonces $A \cap B$ es convexo.*

Nótese que, si $A \cap B = \emptyset$, entonces la definición de convexidad se satisface vacuamente.

Demostración. Supongamos que $a, b \in A \cap B$. Entonces $a.b \in A$ y $a, b \in B$. Por lo tanto, como A y B son convexos, el segmento de recta de a a b está contenido en A y en B, y por lo tanto también en la intersección. □

3. Componentes conexas

Si X es un espacio métrico y $x_0 \in X$, entonces existe un subconjunto máximo conexo que contiene a x_0. Este puede ser definido como la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x_0, ya que la unión de conjuntos conexos no disjuntos es conexa. A tal conjunto se le denomina la *componente conexa*, o simplemente *componente*, de X que contiene a x_0.

De igual definimos las componentes de un conjunto en X. Si $A \subset X$ y $x_0 \in A$, la componente C de A que contiene a x_0 es el subconjunto conexo máximo de A que contiene a x_0. Es decir, si B es un conjunto conexo tal que $x_0 \in B$ y $B \subset A$, entonces $B \subset C$.

Es claro que un espacio X es la unión disjunta de sus componentes.

Teorema 5.19. *Si U es un conjunto abierto en un espacio normado X, entonces sus componentes son abiertos en X.*

La condición de X de ser un espacio normado es necesaria. Por ejemplo, las componentes del espacio $\mathbb{Q}$ (como subespacio de $\mathbb{R}$) son puntos, y estos no son abiertos en $\mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $x_0 \in U$, y sea C la componente de U que contiene a x_0. Sea $y \in C$. Entonces $y \in U$ y, como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset U$. Como $B_\varepsilon(y)$ es conexo (porque es convexo), $B_e(y) \subset C$. □

Se sabe que un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es la unión disjunta contable de intervalos abiertos (ejercicio 7 del capítulo 1). Estamos listos para generalizar este resultado en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que en $\mathbb{R}$, los conjuntos conexos son intervalos, por lo que los conjuntos conexos abiertos son intervalos abiertos.

Teorema 5.20. *Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces U es la unión contable disjunta de conjuntos abiertos conexos.*

Demostración. U es la unión disjunta de sus componentes, las cuales son abiertas por el teorema 5.19. Entonces sólo queda por demostrar que el conjunto de componentes es contable. Sin embargo, como el conjunto $\mathbb{Q}^n$ es contable, el conjunto S de puntos con coordenadas racionales en U es contable. Como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, cada componente de U contiene algún punto de S. Por lo tanto, el conjunto de componentes es contable. $\square$

Ejercicios

1. Muestre que si A es un subespacio conexo de X, entonces su cerradura $\bar{A}$ es también conexo.
2. Como generalización al ejercicio anterior, muestre que si A es conexo y $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B es conexo.
3. Muestre que X es conexo si, y sólo si, toda función continua $f : X \to Y$, donde Y es discreto, es constante.
4. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Entonces existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. El número c es llamado un *punto fijo* de f.
5. Sea S^1 el círculo unitario de radio igual a 1 en $\mathbb{R}^2$, es decir, el conjunto
$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\}.$$
S^1 es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Suponga que $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es continua. Muestre que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.
6. Muestre que una bola $B_r(x_0)$ en en espacio normado X es un conjunto convexo, dado que $B_1(0)$ es convexo.
7. Muestre que si A es convexo, entonces su cerradura $\bar{A}$ es convexo.

Capítulo 6

Espacios completos

1. El teorema de Cantor

En este capítulo estudiaremos más a fondo los espacios métricos completos. Lo primero que haremos es establecer la equivalencia entre completitud y la llamada propiedad de Cantor, la cual demostraremos en esta sección.

Si A es un subconjunto no vacío del espacio métrico (X, d), definimos el *diámetro* de A como

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} \sup_{x,y \in A} d(x,y) & \text{si } A \text{ es acotado} \\ \infty & \text{si } A \text{ no es acotado.} \end{cases}$$

Si A es acotado, entonces el conjunto

$$\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

es acotado ya que, si para algún $x_0 \in X$, $d(x, x_0) \leq M$ para todo $x \in A$, entonces

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \leq 2M$$

para todo $x, y \in A$. Entonces $\operatorname{diam} A$ existe por la completitud de los números reales. Más aún, el diámetro satisface las siguientes propiedades.

Proposición 6.1. *Sean $A, B \subset X$ no vacíos. Entonces*

1. $\operatorname{diam} A = 0$ *si, y sólo si,* $A = \{x\}$ *para algún* $x \in X$*;*
2. *Si* $A \subset B$*, entonces* $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

Demostración. 1. La primera parte se sigue porque $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

2. Si $A \subset B$, entonces
$$\{d(x,y) : x, y \in A\} \subset \{d(x,y) : x, y \in B\},$$
por lo que entonces $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B\}$.

$\square$

Ahora demostraremos el teorema de Cantor, el cual ofrece una propiedad equivalente a completitud en términos del diámetro de sucesiones de conjuntos.

Teorema 6.2 (Cantor)**.** *El espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión decreciente de subconjuntos A_n, no vacíos y cerrados en X, tales que* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$*, tenemos que*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$$
para algún $x_0 \in X$.

Una familia contable $\{A_n\}$ es una *sucesión decreciente* de conjuntos si $A_{n+1} \subset A_n$ para cada n.

Demostración. Supongamos que (X, d) es completo, y sea A_n una sucesión de conjuntos no vacíos cerrados en X, decreciente y tal que
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0.$$
Tomemos una sucesión (x_n) en X tal que $x_n \in A_n$. Observamos que tal sucesión es de Cauchy. Para verificar esto, sean $\varepsilon > 0$ y $N > 0$ tal que $\operatorname{diam} A_N < \varepsilon$. Para todo $n \geq N$, $A_n \subset A_N$ y por lo tanto $\operatorname{diam} A_n < \varepsilon$, lo cual implica que si $m, n \geq N$, entonces
$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$
Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy y, por la completitud de X, converge. Digamos $x_n \to x_0$. Ahora demostraremos que $\bigcap A_n = \{x_0\}$, mostrando que $x_0 \in A_n$ para tod n.

Para demostrar que $x_0 \in A_n$ para todo n, fijamos un n_0 y demostraremos que
$$B_\varepsilon(x_0) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$$
para todo $\varepsilon > 0$. Esto implica que $x_0 \in \overline{A_{n_0}}$ y, como A_{n_0} es cerrado, $x_0 \in A_{n_0}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x_0$, existe $N > 0$ tal que
$$d(x_n, x_0) < \varepsilon$$
para todo $n \geq N$. Si tomamos $n \geq N$ y $n \geq n_0$, entonces
$$x_n \in B_\varepsilon(x_0) \qquad \text{y} \qquad x_n \in A_n \subset A_{n_0}.$$

Entonces

$$x_n \in B_\varepsilon(x_0) \cap A_{n_0}.$$

Por lo tanto $x_0 \in A_{n_0}$ y, como n_0 es arbitrario, $x_0 \in A_n$ para todo n.

Ahora bien,

$$\operatorname{diam}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0,$$

ya que $\bigcap A_n \subset A_k$ para todo A_k y además $\operatorname{diam} A_k \to 0$. Por la proposición 6.1, $\bigcap A_n = \{x_0\}$.

Para mostrar la inversa, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Definimos los conjuntos

$$T_n = \{x_k : k \geq n\},$$
$$A_n = \overline{T_n}.$$

Claramente, cada A_n es no vacío, cerrado, y $A_{n+1} \subset A_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Además,

$$\operatorname{diam} A_n = \sup_{m,k \geq n} d(x_m, x_k),$$

por el ejercicio 1. Como (x_n) es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m, n \geq N$, y por lo tanto

$$\operatorname{diam} A_n \leq \operatorname{diam} A_N \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Entonces $\operatorname{diam} A_n \to 0$. Por la hipótesis del teorema, $\bigcap A_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$, y no es difícil ver que $x_n \to x_0$ (ejercicio 2). $\square$

Ejemplo 6.3. Considere el espacio $\mathbb{R}$. Entonces, dada una subsucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

De hecho, esta propiedad de intesección no vacía de intervalos encajados es equivalente a la completitud de $\mathbb{R}$. No podemos utilizar directamente el teorema de Cantor, ya que la definición de diámetro depende de la completitud de $\mathbb{R}$. Sin embargo, podemos reescribir la hipótesis del teorema de la siguiente manera:

> Sean $A_n \neq \emptyset$, cerrados, $A_n \supset A_{n+1}$, tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todos $x, y \in A_{n_0}$, $d(x, y) < \varepsilon$. Entonces $\bigcap A_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$.

Este enunciado evita el uso del diámetro de un conjunto, y la equivalencia con la completitud de $\mathbb{R}$ se muestra de la misma manera con la que fue demostrado el teorema de Cantor (ejercicio 3).

2. El teorema de Baire

En esta sección mostraremos el teorema de Baire y daremos algunas aplicaciones. Aunque este teorema es una simple consecuencia del teorema de Cantor demostrado en la sección anterior, su uso ofrece un método muy poderoso para resolver diversos problemas de análisis.

Recordemos que si $S, A \subset X$, decimos que S es denso en A si, para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in A$, $B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$; es decir, $\bar{S} \supset A$.

Es claro que la unión de conjuntos densos es también un conjunto denso. Ésto no es necesariamente cierto acerca de la intersección de conjuntos densos, ya que incluso ésta puede ser vacía, como en el caso $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, los cuales son densos en $\mathbb{R}$ y disjuntos. Sin embargo, la intersección contable de conjuntos densos abiertos en un espacio métrico completo es de hecho un conjunto denso. Ésta es la conclusión del teorema de Baire, que establecemos a continuación.

Teorema 6.4 (Baire). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y U_n, $n = 1, 2, \ldots$, conjuntos abiertos densos en X. Entonces*

$$\mathcal{U} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

es denso en X.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Mostraremos que la intersección $B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U}$ no es vacía.

Como U_1 es denso, existe $x_1 \in B_\varepsilon(x) \cap U_1$. Tanto $B_\varepsilon(x)$ como U_1 son abiertos, por lo que $B_\varepsilon(x) \cap U_1$ es también abierto y podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ tal que

$$B_{\delta_1}(x_1) \subset B_\varepsilon(x) \cap U_1.$$

Sea

$$r_1 = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

y

$$A_1 = \bar{B}_{r_1}(x_1).$$

A_1 es cerrado y es subconjunto de $B_\varepsilon(x) \cap U_1$. De igual forma, ya que U_2 es abierto y denso en X, podemos encontrar $x_2 \in X$ y $r_2 \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$ tales que

$$A_2 = \bar{B}_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1) \cap U_2 \subset B_\varepsilon(x) \cap U_2.$$

Por inducción, construímos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos A_n tal que

$$\operatorname{diam} A_n \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$$

y

$$A_n \subset B_\varepsilon(x) \cap U_n.$$

Por el teorema de Cantor, $\bigcap_n A_n = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$. Pero entonces

$$x_0 \in\subset A_n \subset B_\varepsilon(x) \cap U_n$$

para todo n, por lo que concluímos que

$$x_0 \in B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U}.$$

□

Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es *denso en ninguna parte* si el conjunto $X \setminus \bar{A}$ es denso. Es decir, para todo $x \in \bar{A}$ y $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \not\subset \bar{A}$. En otras palabras, $\bar{A}$ no contiene ningún conjunto abierto.

Ejemplo 6.5. El conjunto vacío $\emptyset$ es denso en ninguna parte.

Ejemplo 6.6. Si $X = \mathbb{R}^l$, entonces todos sus subconjuntos finitos son densos en ninguna parte. De hecho, ésto es cierto de todos los subespacios discretos de $\mathbb{R}^l$, como $\mathbb{Z}$ ó $\{1/n\}$.

Ejemplo 6.7. El conjunto de Cantor, definido en el ejemplo 1.41, es un conjunto denso en ninguna parte. Para verificar esto, sea $x \in C$ y $\delta > 0$. Si n es tal que $\dfrac{1}{3^n} < \delta$, entonces es claro que

$$(x - \delta, x + \delta) \not\subset I,$$

donde I es el intervalo de longitud 3^{-n} que contiene a x obtenido en la n-ésima iteración en la construcción de C (véase el ejemplo 1.41). Entonces

$$(x - \delta, x + \delta) \not\subset C.$$

Definición 6.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es un espacio *de primera categoría* si existe una sucesión de conjuntos $E_n \subset X$, densos en ninguna parte, tales que

$$X = \bigcup_n E_n.$$

Decimos que X es *de segunda categoría* si no es de primera categoría.

Es decir, un espacio es de primera categoría si es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte, y de segunda categoría si no lo es.

Corolario 6.9 (Baire)**.** *Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces X es de segunda categoría.*

Demostración. Sea $\{E_n\}$ una colección contable de subconjuntos de X densos en ninguna parte. Demostraremos que

$$\bigcup_n E_n \neq X.$$

Sean

$$U_n = X \setminus \overline{E_n}.$$

Entonces cada U_n es abierto, denso, y, por el teorema de Baire, la intersección

$$\bigcap_n U_n = X \setminus \bigcup_n \overline{E}_n$$

es un conjunto denso. En particular,

$$X \setminus \bigcup_n \overline{E}_n \neq \emptyset$$

y, como

$$\bigcup_n \overline{E}_n \supset \bigcup_n E_n,$$

$X \setminus \bigcup E_n$ tampoco es vacío. Por lo tanto $\bigcup E_n \neq X$. $\square$

Tanto el teorema 6.4 como el corolario 6.9 son conocidos como "el teorema de Baire", y nosotros utilizaremos este nombre para referirnos a cualquiera de estos dos resultados.

3. Consecuencias del teorema de Baire

3.1. Cardinalidad. Una consecuencia directa del teorema de Baire es la incontabilidad de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{R}$ fuera contable, entonces sería la unión contable de cada uno de sus puntos y, como hemos visto que cada subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es denso en niguna parte, esto contradice la completitud de $\mathbb{R}$. Podemos generalizar este resultado de la siguiente manera.

Teorema 6.10. *Sea (X, d) un espacio métrico completo tal que cada uno de sus puntos es un punto de acumulación de X. Entonces X es incontable.*

Demostración. Si x es un punto de acumulación de X, entonces todas las bolas $B_\varepsilon(x)$ contienen puntos de X distintos a x, por lo que entonces el conjunto $X \setminus \{x\}$ es denso. Como $\{x\}$ es cerrado, $\{x\}$ es denso en niguna parte. Si X fuera contable, sería la unión contable de cada uno de sus puntos, una contradicción con la completitud de X, por el teorema de Baire. $\square$

Ejemplo 6.11. El conjunto de Cantor es un subespacio completo de $\mathbb{R}$ (porque es cerrado en $\mathbb{R}$ y por el teorema 2.21) y no tiene puntos aislados (ejercicio 18). Por el teorema 6.10, C es incontable.

3.2. Conjuntos G_δ y F_σ. Sabemos que la intersección infinita de conjuntos abiertos en un espacio métrico no es, en general, un conjunto abierto, y lo mismo sucede con uniones infinitas de conjuntos cerrados. Sin embargo, cuando nos referimos a uniones o intersecciones contables, podemos obtener algunos resultados útiles para resolver varios problemas de análisis.

Definición 6.12. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $A \subset X$ es un conjunto G_δ en X si A es la intersección contable de conjuntos abiertos en X.

Decimos que A es un conjunto F_σ si es la unión contable de conjuntos cerrados en X.

Ejemplo 6.13. Todo subconjunto contable de X es un conjunto F_σ en X. Esto se debe a que cada punto de X es cerrado en X.

Ejemplo 6.14. Si $x \in X$, entonces

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(x),$$

por lo que entonces el conjunto $\{x\}$ es un conjunto G_δ en X.

Ejemplo 6.15. Si A es un conjunto G_δ en X, entonces $X \setminus A$ es un conjunto F_σ. Esto se sigue por la leyes de De Morgan (ejercicio 4). De la misma forma, si A es F_σ, entonces $X \setminus A$ es G_δ en X.

Ejemplo 6.16. Por el ejemplo anterior, si $X \setminus A$ es contable, entonces A es un conjunto G_δ en X.

Ejemplo 6.17. Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son conjuntos F_σ y G_δ en $\mathbb{R}$, respectivamente.

El ejemplo 6.17 da origen a la siguiente pregunta: ¿es el conjunto $\mathbb{Q}$ un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$? La respuesta a esta pregunta es negativa, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 6.18. *El conjunto $\mathbb{Q}$ no es G_δ en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

donde los conjuntos U_n son abiertos en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso, cada U_n es denso, y por lo tanto los conjuntos $E_n = \mathbb{R} \setminus U_n$ son densos en ninguna parte. Entonces podemos escribir

$$\mathbb{R} = \bigcup E_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\},$$

la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte ($\mathbb{Q}$ es contable). Esto contradice el teorema de Baire y la completitud de $\mathbb{R}$. $\square$

3.3. Continuidad de funciones. Consideremos las siguientes funciones en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x = \dfrac{p}{q},\ \operatorname{mcd}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{6.2}$$

donde $\operatorname{mcd}(p, q)$ denota el máximo común divisor de los enteros p y q. La función f es discontinua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, mientras que g es continua precisamente en los números irracionales (ejercicios 5 y 6).

Tales funciones nos hacen pensar en la siguiente pregunta: ¿existe una función en $\mathbb{R}$ que sea continua precisamente en los números racionales, es decir, continua en $\mathbb{Q}$ y discontinua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$? Demostraremos que tal función no existe en lo que resta de esta sección. De nuevo, utilizaremos el teorema de Baire para demostrar este resultado.

Definición 6.19. Dada una función $f : X \to Y$, donde (X, d) y (Y, d') son dos espacios métricos, definimos el *conjunto de continuidades de* f como el conjunto

$$C_f = \{x \in X : f \text{ es continua en } x\}.$$

Para contestar la pregunta anterior, estudiaremos algunas propiedades del conjunto C_f. Para ésto, consideremos las funciones

$$\mathcal{O}_f(x, \delta) = \begin{cases} \sup\{d'(f(y), f(z)) : y, z \in B_\delta(x)\} & \text{si } f \text{ es acotada en } B_\delta(x) \\ \infty & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y

$$\mathcal{O}_f(x) = \inf_{\delta>0} \mathcal{O}(x, \delta).$$

Definición 6.20. La función $\mathcal{O}_f(x)$ es llamada la *oscilación de* f *en* x.

Nótese que si $\delta \le \delta'$, entonces $\mathcal{O}_f(x, \delta) \le \mathcal{O}_f(x, \delta')$, por lo que

$$\mathcal{O}_f(x) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{O}_f(x, \delta)$$

si $\mathcal{O}_f(x, \delta) < \infty$ para algún $\delta > 0$.

Ejemplo 6.21. Considere $X = (0, 1)$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Entonces

$$\mathcal{O}_f\Big(\frac{1}{4}, \delta\Big) = \infty$$

si $\delta \geq 1/4$. Sin embargo, como f es continua en $1/4$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f\Big(B_\delta\big(\frac{1}{4}\big)\Big) \subset B_\varepsilon\Big(f\big(\frac{1}{4}\big)\Big) = B_\varepsilon(4),$$

por lo que

$$\mathcal{O}_f\Big(\frac{1}{4}, \delta\Big) \leq 2\varepsilon.$$

Entonces $\mathcal{O}_f(1/4) = 0$.

En general, si f es continua en x, entonces $\mathcal{O}_f(x) = 0$.

Proposición 6.22. *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos, $f : X \to Y$ y $x \in X$. Entonces f es continua en x si y sólo si $\mathcal{O}_f(x) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en x y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_{\varepsilon/2}(f(x)).$$

Entonces, si $y, z \in B_\delta(x)$,

$$d'(f(y), f(z)) \leq d'(f(y), f(x)) + d'(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por lo que entonces

$$\mathcal{O}_f(x, \delta) \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto demuestra que $\mathcal{O}_f(x) = 0$.

De manera inversa, supongamos que $\mathcal{O}_f(x) = 0$, y sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{O}_f(x, \delta) = 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_f(x, \delta) < \varepsilon$; es decir, para $y, z \in B_\delta(x)$,

$$d'(f(y), f(z)) < \varepsilon.$$

Pero esto implica que $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$ para todo $y \in B_\delta(x)$ y, por lo tanto, f es continua en x. $\square$

Tenemos entonces que

$$C_f = \{x \in X : \mathcal{O}_f(x) = 0\}.$$

Ejemplo 6.23. Considere $X = [0, 1]$ y f la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\mathcal{O}_f(0, \delta) = \infty$ para todo $\delta > 0$.

Ejemplo 6.24. Consideremos ahora $X = [0,1]$ y f la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Véase la figura 1. Entonces $\mathcal{O}_f(0,\delta) = 2$ para todo $\delta > 0$.

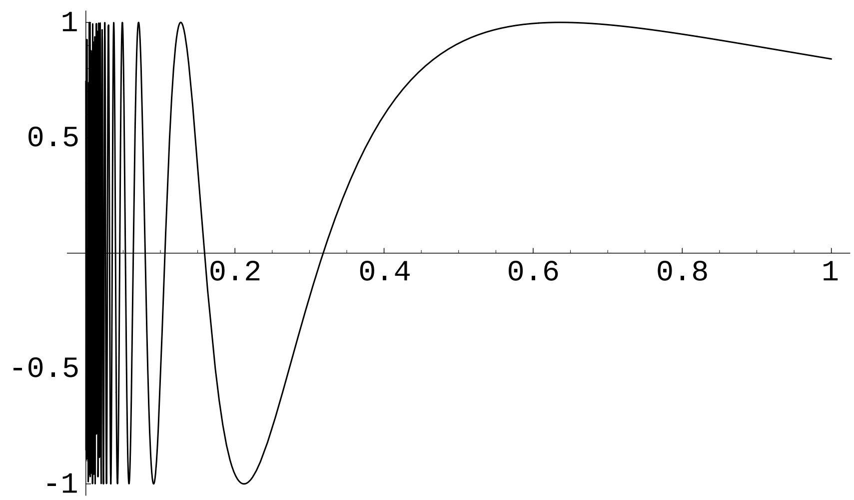

Figura 1. Gráfica de la función f en $[0,1]$.

Ejemplo 6.25. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por (6.1), entonces $\mathcal{O}_f(x,\delta) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$.

Ejemplo 6.26. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por (6.2), entonces $\mathcal{O}_g(x) = g(x)$ (ejercicio 7).

Los ejemplos anteriores describen la función oscilación en distintos puntos del dominio de una función. Sabemos que $\mathcal{O}_f(x) = 0$ si f es continua en x y $\mathcal{O}_f(x) > 0$ si f no es continua en x (o ∞, si f no es acotada en ninguna vecindad de x). Ahora bien, si definimos el conjunto

$$O_f(\varepsilon) = \{x \in X : \mathcal{O}_f(x) < \varepsilon\},$$

tenemos el siguiente resultado.

Lema 6.27. *El conjunto $O_f(\varepsilon)$ es abierto en X.*

Demostración. Sea $x \in O_f(\varepsilon)$. Queremos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x) \subset O_f(\varepsilon),$$

es decir, $\mathcal{O}_f(y) < \varepsilon$ para todo $y \in B_\delta(x)$. Ahora bien, como $x \in O_f(\varepsilon)$, existe un número δ_0 tal que $\mathcal{O}_f(x,\delta_0) < \varepsilon$. De hecho, para algún $\varepsilon_0 > 0$, $\mathcal{O}_f(x,\delta_0) \leq \varepsilon - \varepsilon_0$, es decir,

$$d'(f(y), f(z)) \leq \varepsilon - \varepsilon_0 \text{ para todo } y, z \in B_{\delta_0}(x).$$

Sea $\delta = \delta_0/2$. Demostraremos que $B_\delta(x) \subset O_f(\varepsilon)$. Para ésto, sea $y \in B_\delta(x)$. Si $d(z, y) < \delta$, entonces

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + \delta = \delta_0,$$

por lo que

$$B_\delta(y) \subset B_{\delta_0}(x)$$

y entonces

$$d'(f(z), f(z')) \leq \varepsilon - \varepsilon_0$$

para $z, z' \in B_\delta(y)$. Ésto significa que $\mathcal{O}_f(y, \delta) \leq \varepsilon - \varepsilon_0$, y por lo tanto $\mathcal{O}_f(y) < \varepsilon$. □

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección.

Teorema 6.28. *El conjunto C_f es un conjunto G_δ.*

Demostración. Ya hemos visto que $C_f = \{x \in X : \mathcal{O}_f(x) = 0\}$, por lo que entonces

$$C_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_f(1/n).$$

Cada $O_f(1/n)$ es abierto por el lema 6.27 y, por lo tanto, C_f es un conjunto G_δ. □

Como el conjunto de los racionales no es un conjunto G_δ, por el teorema 6.18 tenemos entonces la respuesta a la pregunta hecha al inicio de estas notas.

Corolario 6.29. *No existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $C_f = \mathbb{Q}$.*

Ejercicios

1. Muestre que para todo subconjunto A del espacio métrico (X, d),
$$\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}.$$
2. Sea A_n una sucesión de subconjuntos de (X, d) tales que $\operatorname{diam} A_n \to 0$. Muestre que si $\bigcap A_n = \{x\}$ y $x_n \in A_n$ para cada n, entonces $x_n \to x$.
3. Muestre la equivalencia entre los siguientes enunciados:
   - * Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado por arriba. Entonces S tiene un supremo.
   - ** Sea $[a_n, b_n]$ una sucesión de intervalos encajados, es decir
   $$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$
   Entonces $\bigcap [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

   El enunciado (**) es utilizado como "Axioma de Completitud" en el texto de Courant y John [1].
4. Sea A un conjunto G_δ en X. Entonces $X \setminus A$ es F_σ en X. Si A es F_σ en X, entonces $X \setminus A$ es G_δ.
5. Muestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (6.1) es discontinua en todo punto de $\mathbb{R}$.
6. Muestre que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (6.2) es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.
7. Muestre que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por (6.2), entonces $\mathcal{O}_g(x) = g(x)$.

Capítulo 7

Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Problema de Valor Inicial

En este capítulo estudiaremos la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) = F(x(t), t), \tag{7.1a}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. En particular, daremos una respuesta a la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones en F la ecuación (7.1a) tiene solución en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ que satisface

$$x(0) = x_0, \tag{7.1b}$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, como condición inicial?

A la pareja de ecuaciones (7.1) se le denomina *problema de valor inicial*, y nos referiremos a él como PVI. Observemos que si integramos con respecto a la variable t la ecuación (7.1a), y haciendo uso del valor inicial (7.1b), llegamos a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s), s)ds. \tag{7.2}$$

Si F es continua, la ecuación (7.2) es equivalente al PVI (7.1), por el teorema fundamental del cálculo. Ésto quiere decir que si la función $x(t)$ es una solución de (7.1), entonces es también una solución de (7.2) y viceversa. Así que estudiaremos el PVI (7.1) a través de la ecuación integral (7.2).

2. El teorema de contracción

Resolveremos el PVI (7.1) a través de un teorema de punto fijo. En particular, haremos uso del teorema de contracción de Banach, el cual demostraremos en esta sección.

Definición 7.1. Dada una función $f : X \to X$ de un conjunto en sí mismo, decimos que x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.

Un "teorema de punto fijo" es un enunciado que garantiza la existencia y unicidad de un punto fijo, bajo ciertas condiciones, de una función dada.

Definición 7.2. Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos, y $\phi : X \to Y$. Decimos que ϕ es una *contracción* si existe un número α, $0 \leq \alpha < 1$, tal que

$$d'(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

para todo x y y en X.

Es decir, una contracción reduce distancias entre puntos. Notemos que en el caso $\alpha = 0$, ϕ es una función constante. En general, decimos que la función $f : X \to Y$, donde (X, d) y (Y, d') son dos espacios métricos, es una *función de Lipschitz con constante* L, si para todo $x, y \in X$,

$$d'(f(x), f(y)) \leq L d(x, y).$$

Por lo tanto, una contracción es una función de Lipschitz con constante menor que 1. Más aún, toda contracción es continua, por el ejercicio 1.

Teorema 7.3 (Contracción de Banach)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si la función $\phi : X \to X$ es una contracción, entonces ϕ tiene un único punto fijo.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y construímos la sucesión (x_n) en X de la forma

$$x_1 = \phi(x_0), \quad x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Mostraremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy y, por la completitud de X, converge.

Sean $n > m$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(\phi(x_{n-1}), \phi(x_{m-1})) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\
&\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) \leq \alpha^m d(x_{n-m}, x_0) \\
&\leq \alpha^m \big(d(x_{n-m}, x_{n-m-1}) + \ldots + d(x_1, x_0) \big) \\
&\leq \alpha^m \big(\alpha^{n-m-1} + \ldots + 1 \big) d(x_1, x_0) \\
&= \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{m-n})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha^m \to 0$. Entonces, si $\varepsilon > 0$ y N es tal que
$$\frac{\alpha^N}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon,$$
entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para $n, m \geq N$, por lo que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Suponemos entonces que $x_n \to \tilde{x}$. Demostraremos que $\tilde{x}$ es un punto fijo mostrando que $d(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to \tilde{x}$, sea $N > 0$ tal que $d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. Entonces
$$\begin{aligned} d(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) &\leq d(\tilde{x}, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, \phi(\tilde{x})) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d(\phi(x_N), \phi(\tilde{x})) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha d(x_N, \tilde{x}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \alpha \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$
Para mostrar la unicidad, supongamos que $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ son dos puntos fijos de ϕ. Entonces
$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\phi(\tilde{x}), \phi(\tilde{y})) \leq \alpha d(\tilde{x}, \tilde{y}),$$
y, como $\alpha < 1$, ésto es posible sólo si $\tilde{x} = \tilde{y}$. □

3. Existencia y unicidad de soluciones

Consideremos entonces la ecuación integral (7.2), donde
$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $r > 0$ y definimos el operador
$$\Phi : C([-r, r], \mathbb{R}^n) \to C([-r, r], \mathbb{R}^n)$$
dado por
$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s), s) ds. \tag{7.3}$$
El operador Φ está bien definido, ya que si x y F son continuas, entonces $s \to F(x(s), s)$ también es continua, por lo que es Riemann-integrable y la integral (indefinida) es una función continua. De hecho, si F es continua, esta integral es diferenciable y
$$(\Phi(x))'(t) = F(x(t), t),$$
por el teorema fundamental del cálculo. Entonces Φ toma valores en
$$C^1([-r, r], \mathbb{R}^n),$$
el espacio de funciones de $[-r, r]$ en $\mathbb{R}^n$ diferenciables y con derivada continua.

Esta observación nos lleva a la siguiente conclusión: para encontrar las soluciones a la ecuación (7.2), es necesario y suficiente encontrar los puntos fijos del operador Φ. Utilizaremos el teorema de contracción de Banach, por lo que necesitamos condiciones para las cuales el operador Φ es una contracción.

Observemos que si $x, y \in C([-r,r],\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_u(\Phi(x),\Phi(y)) &= \sup_{t\in[-r,r]} |\Phi(x)(t)-\Phi(y)(t)| \\ &= \sup_{t\in[-r,r]} \left| \int_0^t \big(F(x(s),s)-F(y(s),s)\big)ds \right| \\ &\leq \sup_{t\in[-r,r]} \int_0^{|t|} \big|F(x(s),s)-F(y(s),s)\big|ds.\end{aligned}$$

Entonces necesitamos de una estimación apropiada de la diferencia

$$\big|F(x(s),s)-F(y(s),s)\big|.$$

Teorema 7.4. *Sea $F : \mathbb{R}^n \times [-r,r] \to \mathbb{R}^n$ una función continua, tal que es de Lipschitz en la primer variable con constante M independiente de la segunda variable. Es decir, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [-r,r]$,*

$$\big|F(x,t)-F(y,t)\big| \leq M|x-y|. \tag{7.4}$$

Entonces, existe $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon < r$, tal que el operador

$$\Phi : C([-\varepsilon,\varepsilon],\mathbb{R}^n) \to C^1([-\varepsilon,\varepsilon],\mathbb{R}^n) \subset C([-\varepsilon,\varepsilon],\mathbb{R}^n),$$

dado por

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s),s)ds, \quad t \in [-\varepsilon,\varepsilon],$$

tiene un único punto fijo.

Demostración. Sean $0 < \alpha < 1$ y $0 < \varepsilon < \min\{r, \alpha/M\}$. Entonces, para $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$,

$$\begin{aligned}\big|\Phi(x)(t)-\Phi(y)(t)\big| &\leq \int_0^{|t|} \big|F(x(s),s)-F(y(s),s)\big|ds \\ &\leq \int_0^{|t|} M\big|x(s)-y(s)\big|ds \\ &\leq M\int_0^{|t|} ||x-y||_u ds = M||x-y||_u|t| \\ &\leq \alpha||x-y||_u,\end{aligned}$$

uniformemente en $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$. Por lo tanto

$$||\Phi(x)-\Phi(y)||_u \leq \alpha||x-y||_u,$$

y entonces Φ es una contracción en $C([-\varepsilon,\varepsilon],\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de contracción de Banach, Φ tiene un único punto fijo. $\square$

Corolario 7.5. *Si F satisface las condiciones del Teorema 7.4, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que el PVI* (7.1) *tiene una única solución en el intervalo* $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

El corolario 7.5 garantiza la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial de primer orden (7.1). Sin embargo, es posible extender este resultado a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden k, para $k \geq 1$, de la forma

$$x^{(k)}(t) = F(x^{k-1}(t), x^{k-2}(t), \dots, x'(t), x(t), t), \tag{7.5a}$$

donde

$$F : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n}_{k \text{ veces}} \times [-r, r] \to \mathbb{R}^n,$$

y con condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots \quad x^{(k-1)}(0) = x_{k-1}, \tag{7.5b}$$
$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n.$$

Corolario 7.6. *Si la función F satisface las hipótesis del Teorema 7.4, vista como una función en $\mathbb{R}^{nk} \times [-r, r]$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el problema de valor inicial* (7.5) *tiene una única solución en el intervalo* $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset [-r, r]$,

Demostración. Considere las nuevas funciones

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= x(t) \\
y_2(t) &= x'(t) \\
&\vdots \\
y_k(t) &= x^{(k-1)}(t) \\
y(t) &= (y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)) \\
G(y, t) &= \big(y_2, \dots, y_k, F(y_k, y_{k-1}, \dots, y_1, t)\big),
\end{aligned}$$

y el punto

$$y_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Entonces, el PVI (7.5) es equivalente a

$$\begin{aligned}
y'(t) &= G(y(t), t), \\
y(0) &= y_0,
\end{aligned}$$

y, como F satisface las condiciones de Lipschitz, entonces

$$G : \mathbb{R}^{nk} \times [-r, r] \to \mathbb{R}^{nk}$$

también satisface las condiciones de Lipschitz del teorema 7.4 (aunque con distintas constantes), por lo que el corolario se concluye de una aplicación del corolario 7.5. $\square$

Ejercicios

1. Muestre que si f es una función de Lipschitz, entonces f es continua.
2. Muestra que la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \sqrt{x}$$
no es una función de Lipschitz.
3. Muestra que el PVI
$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$
tiene una infinidad de soluciones.

Bibliografía

[1] Richard Courant and Fritz John, *Introduction to calculus and analysis. Vol. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] Gerald B. Folland, *Real analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[3] Henri Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sciences Math. **22** (1898), 278-287.

[4] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[5] I. P. Natanson, *Constructive function theory. Vol. I. Uniform approximation*, Translated from the Russian by Alexis N. Obolensky, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1964.

[6] M. H. Stone, *The generalized Weierstrass approximation theorem.* I, Math. Mag. **21** (1948), no. 4, 167-184; II, Math. Mag. **21** (1948), no. 5, 237-254.

[7] Karl Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reeller Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin **9** (July 1885), 633-639.