MA1102 Semestre Verano 2012
Prof. Cátedra: Flavio Guíñez **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 8

Jueves 10 de enero de 2013

P1. Sea V un espacio vectorial con base $B = \{u, v, w\}$ y sea $T : V \longmapsto V$ una transformación lineal tal que:

$$T(u) = v - w,\ T(v) = u + v,\ T(w) = u + 2v - w$$

a) Determine la matriz representante de T c/r a la base B en la partida y en la llegada.

b) Sea $L =< 2u + 3v - w >$. Encuentre los siguientes subespacios y sus dimensiones:

$$\text{i) } T(L), \quad \text{ii) } L \cap \ker(T), \quad \text{iii) } L + \ker(T), \quad \text{iv) } \mathrm{Im}(T)$$

P2. Para cada una de las siguientes partes, dada una base β_V de un espacio vectorial de funciones V dado, encuentre la matriz representante de la transformación lineal $D : V \longmapsto V$, donde $\forall f \in V, D(f)(t) = \frac{d}{dt}(f(t))$ (la derivada), en la base respectiva β_V en la partida y en la llegada:

(i) $\beta_V = \{1, t, t^2, t^3\}$

(ii) $\beta_V = \{sen(t), cos(t), sen(2t), cos(2t)\}$

(iii) $\beta_V = \{1, e, e^t, e^{2t}, te^{2t}\}$

P3. Considere el conjunto $\beta \subseteq \mathbb{R}^4$, dado por:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \ker(T) = \mathbb{I}m(T)$$

a) Pruebe que β es una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Encuentre una base de $\ker(T)$.

c) Calcule la matriz representante de T c/r a la base β en la partida y en la llegada.

d) Calcule la matriz representante de T c/r a la base canónica en la partida y en la llegada.

$\boxed{\text{P4.}}$ Sea E un e.v. sobre $\mathbb{K}$. Sean V, W s.e.v. de E tales que $V \cap W = \{0\}$ y $S : V \longmapsto W$ una transformación lineal. Definimos $T : V \oplus W \longmapsto W$ por:

$$T(x) = S(x_v) + x_w, \text{ donde } x = x_v + x_w, \text{ con } x_v \in V, x_w \in W$$

a) Pruebe que T está bien definida como función y que es lineal.

b) Si $\beta_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\beta_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases de V y W respectivamente, pruebe que $\beta_{VW} = \beta_V \cup \beta_W$ es una base de $V \oplus W$.

c) Si A_S es la matriz representante de S c/r a las bases β_V y β_W, calcule la matriz representante de T c/r a las bases β_{VW} y β_W.

d) Pruebe que $\{v_1 - S(v_1), \ldots, v_n - S(v_n)\}$ es una base de $\ker(T)$.

e) Pruebe que T es epiyectiva. Indicación: use T.N.I.