MA1102, Álgebra Lineal - Semestre Verano 2012
Prof. Cátedra: Flavio Guíñez **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar #6

Miércoles 2 de enero de 2013

P1. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores de $\mathbb{R}^n$, y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$. Pruebe que $\{v1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i. sí y solo si A es invertible

P2. a) Pruebe que el conjunto de polinomios reales

$$\{1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3), \ldots, \prod_{k=1}^{n}(x-k)\}$$

es l.i

b) Un conjunto $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathbb{R}^n$ se dice ortogonal si $\forall i, j \leq r, i \neq j, < x_i, x_j >= 0$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\}$ $(r < n)$ un conjunto ortogonal que cumple además $\|x_i\| = 1$ $\forall i$.

(i) Se define

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^{r} < y, x_k > x_k,$$

con $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ es ortogonal.

(ii) Demuestre que $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ es l.i. .

P3. Sean E, F e.v sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea T una función $T : E \to F$, que satisface:

(1) $T(0_E)$=0_F. Donde 0_E y 0_F son los neutros aditivos en cada e.v.

(2) $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

(3) $\forall x, y \in E$: $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Considere $T(E) = \{y \in F \mid y = T(x),\, x \in E\}$

a) Muestre que $T(E)$ es un s.e.v de F.

b) Suponga además que T satisface que: $\forall x \in E,\ T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Muestre que si $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq E$ es l.i, entonces $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\} \subseteq F$ es l.i.

c) Supongamos $E = F$. Sea $x_o \in E$ tal que $T^m(x_0) = 0$, $T^{m-1}(x_0) \neq 0$ para algún entero positivo m. Muestre que $x_0, T(x_0), \ldots, T^{m-1}(x_0)$ son linealmente independientes.

Nota: $T^m(x_0) = T(T \ldots T(x_0))$ (la composición de T m veces) .

P4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para un intervalo $[a,b) \subseteq [0,n)$, con $a,b \in \mathbb{N}$, definimos la función $\mathbb{1}_{[a,b)}$ indicatriz de $[a,b)$ por:

$$\mathbb{1}_{[a,b)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a,b) \\ 0, & x \notin [a,b) \end{cases}$$

Sea $F([0,n),\mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0,n)$ en $\mathbb{R}$. Definimos $E \subseteq F([0,n),\mathbb{R})$ como el conjunto de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir:

$$f \in E \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1,i)}(x), \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \ \ \forall x \in [0,n),$$

a) Pruebe que $\forall a,b \in \mathbb{N}$ tal que $[a,b) \subseteq [0,n)$, $\mathbb{1}_{[a,b)} \in E$.

b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $f \in E$. Pruebe que $\alpha f \in E$.

c) Pruebe que E es un s.e.v de $F([0,n),\mathbb{R})$.

d) Pruebe que el conjunto de funciones $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \ldots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$ es base de E.

e) Encuentre un isomorfismo $T : E \mapsto \mathbb{R}^n$. Calcule $T(\mathbb{1}_{[a,b)})$.