MA1102, Álgebra Lineal - Semestre Verano 2012
Prof. Cátedra: Flavio Guíñez **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 5

Viernes 28 de Diciembre

1. Sean $p, d \in \mathbb{R}^3$, ambos no nulos. Se define: $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x - p) \times d = 0\}$
   (i) Pruebe que $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / x = p + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   (ii) Sea $b \in \mathbb{R}^3, b \neq \mathbf{0}$ y no ortogonal a b. Determine qué condiciones deben satisfacer d y b para que la recta L de la parte anterior y el plano $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 / < x, b >= 0\}$ se intersecten.

2. *a*) Sean p, q, r tres puntos en $\mathbb{R}^3$ no colineales. Sea π el plano que contiene a dichos puntos. Demuestre que
$$x \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tales que } \alpha + \beta + \gamma = 1, x = \alpha p + \beta q + \gamma r$$
   b) Sean las rectas
$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   Pruebe que el plano que contiene a L_1, L_2 tiene ecuación cartesiana dada por $x + y - z = 1$

3. Sea P$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y Π el plano de ecuación $2x - y - z = 2$.
   a) Sea $R \in \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal del punto P sobre el plano Π. Pruebe que $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   b) Calcular la proyección ortogonal de P sobre la recta que pasa por R de dirección $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   c) Sea Q la proyección calculada en la parte anterior. Determine la ecuación normal (o cartesiana) del plano que contiene a P, Q y R.

4. Sea $\mathcal{P}_4$ el conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a 4. Definimos
$$V_1 = \{p \in \mathcal{P}_4 | \, p(1) + 2p(-1) = 0\}, \; V_2 = \{p \in \mathcal{P}_4 | \, p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 \;\; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
   a) Pruebe que V_1, V_2 son s.e.v. de $\mathcal{P}_4$
   b) Muestre que $V_1 = \langle \{1 + x^4, x + x^3, x^2\} \rangle$

5. Sea $M_{n,n}$ el espacio de las matrices a coeficientes reales. Consideramos los conjuntos:
$$E = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} | \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = c \text{ para todo } 1 \leq n\}$$
$$E_0 = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} | \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0 \text{ para todo } 1 \leq n\}$$
   a) Demuestre que E es s.e.v. de $M_{n,n}$
   b) Demuestre que E_0 es s.e.v de E
   c) Encuentre $\{A_1, \ldots A_{n(n-1)}\} \subseteq E_0$ que sean l.i y tales que $\langle \{A_1, \ldots A_{n(n-1)}\} \rangle = E_0$