

MA1102 Álgebra Lineal - Semestre Verano 2012**Prof. Cátedra:** Flavio Guíñez **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Pauta Auxiliar # 2 (lo que prometí y algo más)

P1. Una matriz $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$.

- (iv) Sea U triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes de la diagonal de U .

SOL:

Como U es unitaria, es invertible. Dado que U es triangular superior, su inversa es triangular superior. Como $U^{-1} = U^T$, y esta última es triangular inferior, tenemos que U^{-1} es triangular inferior y superior a la vez, por lo tanto es diagonal, y luego concluimos que U es diagonal.

Dado que U es diagonal, $U^T = U$ y por lo tanto $U^T U = U^2$. Luego, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$
 $U_{ii}^2 = 1 \Leftrightarrow U_{ii} = 1 \vee U_{ii} = -1$.

P2.

- b) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

- (i) A es invertible $\Leftrightarrow AA^t$ es invertible.
(ii) Si $A = A^2$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$.

SOL (i):

A es invertible $\Rightarrow A^T$ es invertible $\Rightarrow AA^T$ es invertible.

AA^T es invertible $\Rightarrow \exists B$ tal que $(AA^T)B = I \Rightarrow A(A^T B) = I \Rightarrow A$ es invertible con inversa $A^{-1} = A^T B$.

SOL (ii):

$B^2 = (I - A)^2 = (I - A)(I - A) = (I^2 - IA - AI + A^2) = (I - 2A + A) = I - A \Rightarrow B^3 = BB^2 = BB = B^2 = B$

- P3.** a) Sea $K \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $K^T = -K$ y $I - K$ es invertible. Si $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, demuestre que

$$B^T B = BB^T = I_n$$

SOL:

$$\begin{aligned}
B^T B &= ((I + K)(I - K)^{-1})^T (I + K)(I - K)^T \\
&= ((I - K)^{-1})^T (I + K)^T (I + K)(I - K)^{-1} \\
&= ((I - K)^T)^{-1} (I + K)^T (I + K)(I - K)^{-1} \\
&= (I + K)^{-1} (I - K) ((I - K)^{-1} + K(I - K)^{-1}) \\
&= (I + K)^{-1} ((I - K)(I - K)^{-1} + (I - K)K(I - K)^{-1}) \\
&= (I + K)^{-1} (I + (I - K)K(I - K)^{-1}) \\
&= (I + K)^{-1} (I + (K - K^2)(I - K)^{-1}) \\
&= (I + K)^{-1} (I + K(I - K)(I - K)^{-1}) \\
&= (I + K)^{-1} (I + K) \\
&= I
\end{aligned}$$

Basta hacerlo en un sentido, ya que la conmutatividad de B y B^T se deduce de que una es la inversa de la otra.

- b) (i) Sean $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que $\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^T y \rangle$.
(ii) Sea $A = I_n + B^T B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\langle Ax, x \rangle = \|x\|^2 + \|Bx\|^2$.
(iii) Concluya que A es invertible.

SOL (i):

$$\langle Bx, y \rangle = (Bx)^T y = (x^T B^T) y = x^T (B^T y) = \langle x, B^T y \rangle$$

SOL (ii):

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x \rangle &= \langle (I + B^T B)x, x \rangle \\
&= \langle x + B^T Bx, x \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle B^T (Bx), x \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle Bx, (B^T)^T x \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle Bx, Bx \rangle \\
&= \|x\|^2 + \|Bx\|^2
\end{aligned}$$

SOL (iii):

Supongamos que $Ax = 0$. Luego, $0 = \langle Ax, x \rangle = \|x\|^2 + \|Bx\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Así, el sistema Ax tiene solución única $x = 0$ y por lo tanto A es invertible.