MA1102 Álgebra Lineal - Semestre Verano 2012

Prof. Cátedra: Flavio Guíñez **Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 2

Miércoles 19 de Diciembre

P1. Una matriz $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$.

- (i) Sean $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ unitarias. Pruebe que U es invertible y que $U_1 U_2$ es unitaria.
- (ii) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^T u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^T$ es unitaria.
- (iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $(G(\theta)A)_{21} = 0$.
- (iv) Sea U triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes de la diagonal de U .

P2. a) Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ por $A = uv^t$.

- (i) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n Ax = 0 \Leftrightarrow v^t x = 0$.
 - (ii) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$ y estudie si A es o no invertible.
- b) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que:
- (i) A es invertible $\Leftrightarrow AA^t$ es invertible.
 - (ii) Si $A = A^2$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$.

P3. a) Sea $K \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $K^t = -K$ y $I - K$ es invertible. Si $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, demuestre que

$$B^t B = BB^t = I_n$$

- b) (i) Sean $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que $\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^T y \rangle$.
- (ii) Sea $A = I_n + B^T B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\langle Ax, x \rangle = \|x\|^2 + \|Bx\|^2$.
- (iii) Concluya que A es invertible.

P4. Encuentre el conjunto de los valores de $x_1, \dots, x_6$ que resuelve:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

P5. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & & & - & \alpha \cdot x_3 & - & \beta \cdot x_4 & = & 0 \\ \alpha \cdot x_1 & + & \beta \cdot x_2 & & & & & & = & 0 \\ \beta \cdot x_1 & + & \beta \cdot x_2 & + & \alpha \cdot x_3 & & & & = & \beta \\ & + & x_2 & + & \alpha \cdot x_3 & + & \beta \cdot x_4 & = & \alpha \end{array}$$

- (i) Encuentre los valores de α y β para que el sistema:
- (1) No tenga solución.
 - (2) Tenga infinitas soluciones.
 - (3) Tenga solución única.
- (ii) Para el caso de $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ encuentre el conjunto solución del sistema.