

MA1102, Álgebra Lineal – Semestre Verano 2012**Profesor de Cátedra:** Flavio Guíñez**Profesor Auxiliar:** César Vigouroux

Auxiliar # 1

P1. Se dice que $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es una matriz de proyección si $P = P^2$.

- (a) Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $I_n - P$ es matriz de proyección, donde I_n es la matriz identidad en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- (b) Pruebe que P es matriz de proyección si y sólo si $P^2(I_n - P) = \mathbf{0}$ y $P(I_n - P)^2 = \mathbf{0}$.

P2. Sean $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ diagonal ($d_1, \dots, d_n$ reales distintos), A, B, M y $S \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- (a) Pruebe que si $MD = DM$, entonces M es diagonal.
- (b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.
- (c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

P3. a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisface la condición

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0$$

Pruebe que $A^{-1} = -A - 3I$

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $B^3 = 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definamos la matriz

$$M(\lambda) := I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

Pruebe que:

- (i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, M(\alpha + \beta) = M(\alpha) \cdot M(\beta)$
- (ii) Pruebe que $M(\lambda)$ es invertible $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Para ello, piense en $M(0)$.

P4. a) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se definen la *traza* de A , denotado por $\text{tr}(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ y la función $f : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde para cada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $f(A) = \text{tr}(AA^t)$

Pruebe que:

- (i) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

- (ii) $f(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, además muestre que: $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- (iii) $f(A) = \text{tr}(A^t A)$.
- b) Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $M^t M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ como $P := I_m - M(M^t M)^{-1} M^t$, donde I_m es la matriz identidad de orden m .
- Pruebe que:
- (i) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.
- (ii) La matriz $M^t M$ es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica.
- (iii) Pruebe que P **no** es invertible.