Pauta P2 Control # 3 (Corregida)

Cálculo Diferencial e Integral (MA1002) - Semestre Verano 2012

Profesor: Raúl Uribe S.

Prof. auxiliar: Franco Basso S.

Autor: Néstor Jofré M.

IMPORTANTE: La puntuación detallada de cada pregunta está sujeta al uso adecuado de fórmulas empleadas en cada desarrollo, por lo tanto, es relativa y no existe una única solución para cada problema.

$\boxed{\text{P2.}}$ (a) (3.0 pts.) Se tiene la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$f(t) = \left(t^2, t + \frac{t^3}{3}, t - \frac{t^3}{3}\right)$$

Calcular su curvatura y torsión en cualquier punto.

SOL.: De la función $f \in \mathcal{C}^\infty$ en su dominio, $\mathbb{R}^3$, se deducen las siguientes funciones:

- $f'(t) = (2t, 1+t^2, 1-t^2) \Rightarrow ||f'(t)|| = \sqrt{2}\,(t^2+1)$
- $f''(t) = (2, 2t, -2t)$
- $f'''(t) = (0, 2, -2)$

Entonces, $f'(t) \times f''(t) = (-4t, 2t^2+2, 2t^2-2) \Rightarrow ||f'(t) \times f''(t)|| = 2\sqrt{2}\,(t^2+1)$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{||f'(t) \times f''(t)||}{||f'(t)||^3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}\,(t^2+1)}{\left(\sqrt{2}\,(t^2+1)\right)^3} \\
&= \frac{\cancel{2\sqrt{2}\,(t^2+1)}^{\,1}}{\cancel{2\sqrt{2}}\,(t^2+1)^{\cancel{3}\,2}} \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{(f'(t) \times f''(t)) \cdot f'''(t)}{||f'(t) \times f''(t)||^2} \\
&= \frac{(-4t, 2t^2+2, 2t^2-2) \cdot (0, 2, -2)}{\left(2\sqrt{2}\,(t^2+1)\right)^2} \\
&= \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}\,(t^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^2} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Puntuación:

- ✓ 1 pto.: Cálculo de derivadas de f
- ✓ 1 pto.: Cálculo de $\kappa(t)$ (curvatura)
- ✓ 1 pto.: Cálculo de $\tau(t)$ (torsión)

(b) (3.0 pts.) Dada la curva parametrizada por

$$
f(t) = \left(\int_a^t e^{-2u} \cos \sqrt{u} du, 1 - e^{-2t}, \int_0^t e^{-2u} \sin \sqrt{u} du \right)
$$

Calcular su longitud para $t \in [0, \infty)$ y los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ en todo punto t.

SOL. : Ya que $f \in \mathcal{C}^\infty$ en su dominio, $[0, \infty)$, entonces, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo de manera apropiada, se obtiene que:

$$
f'(t) = \left(e^{-2t} \cos \sqrt{t}, 2e^{-2t}, e^{-2t} \sin \sqrt{t} \right) \Rightarrow ||f'(t)|| = \sqrt{5} e^{-2t}
$$

Entonces, la longitud de la curva para $t \geq 0$ es:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t ||f'(t)|| dt \\
&= \int_0^t \sqrt{5} e^{-2t} dt \\
&= \sqrt{5} \int_0^t e^{-2t} dt \\
&= \sqrt{5} \left(-\frac{e^{-2t}}{2} \right) \Bigg|_0^t \\
&= \sqrt{5} \left(-\frac{e^{-2t}}{2} - -\frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - e^{-2t} \right) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

* Observación: la palabra *longitud* puede prestarse para ambigüedades, por lo tanto, también es aceptable el cálculo de la longitud de la curva, es decir, $l(f) = \lim_{t \to \infty} s(t) =$

$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - \cancelto{0}{e^{-2t}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\blacksquare$.

Calculando el vector tangente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{f'(t)}{||f'(t)||} \\
&= \frac{\left(e^{-2t}\cos\sqrt{t}, 2e^{-2t}, e^{-2t}\sin\sqrt{t}\right)}{\sqrt{5}e^{-2t}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\cos\sqrt{t}, 2, \sin\sqrt{t}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

De manera equivalente, se calcula el vector normal. Se tiene que $\hat{T}'(t) = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}, 0, \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) \Rightarrow ||\hat{T}'(t)|| = \frac{1}{\sqrt{20t}} = \frac{\sqrt{5t}}{10t}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{N} &= \frac{\hat{T}'(t)}{||\hat{T}'(t)||} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}, 0, \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{\sqrt{5t}}{10t}} \\
&= \left(-\sin\sqrt{t}, 0, \cos\sqrt{t}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Finalmente, el vector binormal se calcula como:

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \hat{T} \times \hat{N} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\cos\sqrt{t}, 2, \sin\sqrt{t}\right) \times \left(-\sin\sqrt{t}, 0, \cos\sqrt{t}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\cos\sqrt{t}, -1, 2\sin\sqrt{t}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Puntuación:

- ✓ 0,6 ptos.: Cálculo de $f'(t)$ y $||f'(t)||$
- ✓ 0,6 ptos.: Cálculo de $s(t)$ (longitud de arco) / $l(f)$ (longitud de curva)
- ✓ 0,6 ptos.: Cálculo de $\hat{T}(t)$ (vector tangente)
- ✓ 0,6 ptos.: Cálculo de $\hat{N}(t)$ (vector normal)
- ✓ 0,6 ptos.: Cálculo de $\hat{B}(t)$ (vector binormal)