

AUXILIAR 12: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: AVELIO SEPÚLVEDA - FELIPE SUBIABRE

23 DE OCTUBRE DE 2012

P1. En este problema se presenta una condición necesaria y suficiente para que el mapeo $g \mapsto T_g$ entre $L^\infty(\mu)$ y $(L^1(\mu))^*$ definido por $T_g(f) = \int f g d\mu$ sea una isometría.

- a) Muestre que para todo $g \in L^\infty(\mu)$ el funcional lineal $T_g(f) = \int f g d\mu$ es continuo en $L^1(\mu)$, y tal que $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$.
- b) Considere un conjunto no vacío X y la medida definida en cada subconjunto de X por $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$. Muestre que $L^1(\mu) = \{0\}$ y $L^\infty(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada en } X\}$ y concluya que $g \in L^\infty(\mu)$ satisface $\|T_g\| = \|g\|_\infty$ si y sólo si $g \equiv 0$.
- c) Un espacio de medida se dice *semifinito* si todo conjunto medible de medida infinita posee un subconjunto de medida finita estrictamente positiva. Pruebe que en un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $g \mapsto T_g$ es una isometría si y sólo si el espacio es semifinito.

P2. Desigualdad de Minkowsky para integrales

Sean (X, τ, μ) y $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ dos espacios de medida σ -finitos y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\tau \otimes \mathcal{F}$ -medible. Pruebe que si $f \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left[\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

Indicación: Considere q el índice conjugado de p y estudie la aplicación

$$g \in L^q \rightarrow T(g) = \int_X \left[\int_Y f(x, y)^p d\nu(y) \right] g(x) d\mu(x)$$

P3. a) Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida tal que existen conjuntos medibles $E_1, E_2, \dots, E_n$ tales que $0 < \mu(E_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$, y cada E_i no contiene ningún subconjunto propio no vacío y medible. Muestre que $(L^\infty(\mu))^* = L^1(\mu)$, es decir, la función

$$\begin{aligned} T : L^1(\mu) &\rightarrow (L^\infty(\mu))^* \\ g &\mapsto T(g)(f) = \int_X f(x)g(x)dx \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

b) Sea $X = [0, 1]$, dotado de los Borelianos y de la medida de Lebesgue. Probaremos que en este contexto $L^1 \subsetneq (L^\infty)^*$. Para ello:

- (i) Suponga lo contrario. Pruebe que $\exists h \in L^1$ tal que $\forall f$ continua, $f(0) = \int_0^1 f(x)h(x)dx$.
 - (ii) Pruebe que $\forall 0 < a < b < 1$, $\int_a^b h(x)dx = 0$.
 - (iii) Pruebe que $\int_0^1 h(x)dx = 1$. Concluya.
- c) Sea μ una medida σ -finita, $1 \leq p < \infty$, q el exponente Hölder-conjugado de p . Sea f una función medible tal que $fg \in L^1(\mu)$, $\forall g \in L^q(\mu)$. Demuestre que $f \in L^p(\mu)$.