Auxiliar 9: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Avelio Sepúlveda - Felipe Subiabre
3 de octubre de 2012

P1. En este problema $[a, b] \subseteq R$ es un intervalo acotado, y en él se considera la medida de Lebesgue.

a) (Lema de Fubini) Sea $(f_n)_n$ una secuencia de funciones crecientes en $[a, b]$. Suponga que la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge para todo $x \in [a, b]$. Pruebe que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

c.t.p. en x.

b) Sea f una función continua en $[a, b]$ y $0 \leq V \leq \infty$ su variación en este intervalo. Muestre que para todo $\lambda < V$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=0^n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \lambda$$

siempre que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \text{y} \quad \max_i (x_{i+1} - x_i) < \delta.$$

c) (Teorema de Banach) Sea f una función continua en $[a, b]$. Demuestre que entonces

$$V(f; [a, b]) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t)dt,$$

donde $n(t)$ denota el número (posiblemente infinito) de soluciones x de la ecuación $f(x) = t$.

d) Sea F una función definida en $[a, b]$ y $1 < p < \infty$. Muestre que para que exista $f \in L^p([a, b])$ tal que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

es necesario y suficiente que

$$\sup_{\Delta} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} < \infty,$$

donde Δ recorre todas las particiones $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ de $[a, b]$. Además en este caso se tiene que el supremo es igual a $\|f\|_p^p$.

P2. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible.

a) Sean μ y ν dos medidas en $\mathcal{F}$. Muestre que si ν es finita, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $\nu \ll \mu$.
2) Para toda sucesión $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ con $\lim_n \mu(A_n) = 0$, se tiene $\lim_n \nu(A_n) = 0$.
3) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \delta$ entonces $\nu(A) < \varepsilon$.

b) Sean $\mu, (\nu_n)_n$ medidas finitas en $\mathcal{F}$ tales que $\nu_n \ll \mu$ para cada n. Suponga que $\lim_n \nu_n(A)$ existe para cada $A \in \mathcal{F}$. Demuestre que:

i) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \delta$ entonces $\nu_n(A) < \varepsilon$ para todo n.
ii) La función $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ definida por $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ es una medida tal que $\nu \ll \mu$.