Auxiliar 7: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Avelio Sepúlveda - Felipe Subiabre
25 de septiembre de 2012

P1. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x,\cdot) \text{ es de clase } \mathcal{C}^1,\ \forall t \in \mathbb{R}\ f(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R},dx)$$

y que además existe $g \in L^1(\mathbb{R},dx)$ tal que $\forall x,t \in \mathbb{R}\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.

Pruebe entonces que la función $F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$ es de clase $\mathcal{C}^1$, con derivada dada por $F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

b) Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ espacio de medida finita. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \in L^p\ \forall 1 \leq p < \infty$. Se probará que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ (pudiendo ser este valor infinito). Para ello:

i) Pruebe el resultado si $\|f\|_\infty = 0$.

ii) En caso contrario, pruebe directamente que $\limsup_p \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

iii) Pruebe que $\forall \alpha < \|f\|_\infty, \liminf_p \|f\|_p \geq \alpha$. Concluya.

P2. Consideremos (X,τ,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Diremos que $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_n\}$ es una partición finita si $\mathcal{A}$ es una partición de X, y los conjuntos $A_i, i = 1,\ldots,n$ son medibles y de medida positiva. Para una partición finita $\mathcal{A}$ considere

$$T_{\mathcal{A}}f = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\mu(A_i)}\int_{A_i} f(x)d\mu(x)\right)1_{A_i}$$

i) Pruebe que si $f \in L^1$, entonces $T_{\mathcal{A}}f \in L^1$, que $T_{\mathcal{A}}$ es lineal y que en L^1 tiene norma menor o igual a 1.

Dadas dos particiones finitas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se dice que $\mathcal{B}$ es más fina que $\mathcal{A}$ si todo elemento de $\mathcal{B}$ está contenido en uno de $\mathcal{A}$ y los elementos de $\mathcal{A}$ son uniones de elementos de $\mathcal{B}$. Esta relación de orden se denotará $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

ii) Pruebe que para $f \in L^1$ se tiene el siguiente resultado: dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{A}$ partición finita tal que

$$\forall \mathcal{B} \text{ partición finita, } \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \implies \|T_{\mathcal{B}}f - f\|_1 \leq \varepsilon$$

P3. Algunas generalizaciones del TCD

Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida.

a) **TCD para convergencia en medida**

i) Pruebe que si $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ entonces

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f d\mu = 0.$$

ii) Sean $0 \leq f_n \leq g$, con f_n, g medibles tales que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ y g integrable. Pruebe que $\displaystyle\int_X f_n d\mu \to 0$.

iii) Concluya la versión del TCD para convergencia en medida: si f_n, f, g son medibles tales que $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $|f_n| \leq g$ y $g \in L^1$, entonces $f_n \to f$ en L^1.

b) **Teorema de Young**

Sean f_n, g_n, h_n sucesiones de funciones μ-integrables tales que

$$g_n \leq f_n \leq h_n \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

y

$$f_n \to f,\ g_n \to g,\ h_n \to h.$$

Donde g y h son funciones integrables.

Pruebe que si $\displaystyle\int_X g_n d\mu \to \int g d\mu$ y $\displaystyle\int_X h_n d\mu \to \int h d\mu$, entonces f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$