Auxiliar 5: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Avelio Sepúlveda - Felipe Subiabre
4 de septiembre de 2012

P1. Sea (X, τ, μ) un espacio de medida finita.

a) Pruebe que si $f : X \to \mathbb{R}$ es τ-medible entonces son equivalentes:
- f es integrable.
- $\sum_{k=0}^{\infty} k\mu\{x : k \leq |f| < k+1\} < \infty$.

b) Demuestre que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es μ-medible si y sólo si para cada A medible con $\mu(A) > 0$ y $\varepsilon > 0$ existe $B \subseteq A$ medible tal que $\mu(B) > 0$ y $\sup\limits_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

P2. Sea (X, τ, μ) un espacio de probabilidad ($\mu(X) = 1$) y $H : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define la función de distribución de H, denotada por $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, como:

$$F(\alpha) := \mu\left(\{x \in X : H(x) \leq \alpha\}\right)$$

Demuestre que:

a) F es creciente y continua a la derecha.

b) Para toda función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliana se tiene que:

$$\int_X \phi(H(x))d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\alpha)d\mu_F(\alpha)$$

Donde μ_F es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F.
Este resultado justifica el cálculo en la forma usual de la esperanza de una variable aleatoria.

P3. Sea (X, τ, μ) espacio de medida finita, $f_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones μ-medibles, $f : X \to \mathbb{R}$ μ-medible. Decimos que esta sucesión:

- Es de Cauchy en medida si $\forall c > 0$ se tiene

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{m,n \geq N} \mu(\{x \in X, |f_n(x) - f_m(x)| \geq c\}) = 0$$

- Converge en medida a f (se denota $f_n \xrightarrow{\mu} f$) si $\forall c > 0$ se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq c\}) = 0$$

a) Muestre que si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces f_n es de Cauchy en medida, y el límite es único μ-c.t.p.

b) Pruebe que la convergencia μ-c.t.p. implica la convergencia en medida, pero el recíproco no es cierto.

c) Demuestre que si f_n es de Cauchy en medida entonces existe una función f μ-medible y una subsucesión f_{n_k} tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $f_{n_k} \to f$ μ-c.t.p.