Auxiliar 4: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Avelio Sepúlveda - Felipe Subiabre
21 de agosto de 2012

P1. Un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se dice *semifinito* si para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = +\infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subseteq E$ y $0 < \mu(F) < +\infty$.

a) Muestre que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es semifinito, se tiene que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = +\infty$ y $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subseteq E$ y $r < \mu(F) < +\infty$.

b) Pruebe que la función $\lambda : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subseteq A \text{ y } \mu(B) < +\infty\}$$

define una medida semifinita, que coincide con μ si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es semifinito.

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\mathcal{A}_\mu$ su completación y μ^* la medida exterior generada por μ. Demostrar que para cada $A \subseteq \Omega$,

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subseteq B\},$$

y que si definimos la "medida interior"

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < +\infty$ entonces $A \in A_\mu$.

P3. Algunas curiosidades

a) Sea A un conjunto de medida de Lebesgue positiva. Muestre que el conjunto $A - A = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ contiene un intervalo.

b) Pruebe que una base de Hamel de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tiene medida interior de Lebesgue nula, y que existen bases de Hamel medibles.
Obs: También se puede probar que existen bases no medibles, pero esto no es elemental.

Teorema: Sea μ una medida finita en una σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre un espacio X y S un conjunto tal que $\mu_*(S) = \alpha < \mu^*(S) = \beta$. Entonces para cada $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existe una medida ν en la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{B} \cup \{S\})$ tal que $\nu = \mu$ en $\mathcal{B}$ y $\nu(S) = \gamma$.

c) Pruebe el teorema en el caso $\alpha = 0, \beta = \mu(X)$.

d) Concluya el resultado en el caso general.

En particular, una medida no tiene extensión maximal a menos de que se pueda extender a todos los subconjuntos del espacio.