Auxiliar 1: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Leonardo Sepúlveda - Felipe Subiabre

P2. a) ii) Ya vimos que $\mathcal{F}$ es cerrado para complementos. Notemos que si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ entonces existen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cerrados tales que $F_n \subseteq B_n \subseteq U_n$ y $\mu(U_n \backslash F_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Notar la siguiente propiedad:

$$\bigcup_{n=1}^{N} U_n \backslash \bigcup_{n=1}^{N} F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (U_n \backslash F_n) \tag{1}$$

para cualquier $N \in \mathbb{N}$.
En particular para $N = 2$ esto implica que tomando $U = U_1 \cup U_2$ abierto, $F = F_1 \cup F_2$ cerrado tales que $F \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq U$ se tiene que $\mu(U \backslash F) \leq \mu(U_1 \backslash F_1) + \mu(U_2 \backslash F_2) \leq \varepsilon$, luego $\mathcal{F}$ es cerrado para uniones finitas. Esto junto con la cerradura para complementos implica que $\mathcal{F}$ es un álgebra, por lo que para ver que es σ-álgebra sólo basta ver que es cerrado para uniones numerables disjuntas.
Suponemos entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ disjuntos, y notamos que como μ es finita

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) < +\infty$$

lo que implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Pero esto conduce a una cota sobre la medida de la cola de los U_n:

$$\begin{aligned} U_n = (U_n \backslash F_n) \cup F_n \subseteq (U_n \backslash F_n) \cup B_n \quad &\Longrightarrow \quad \mu(U_n) \leq \mu(U_n \backslash F_n) + \mu(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \mu(B_n) \\ &\Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomemos entonces $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ abierto, $F = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$ cerrado tales que $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq U$, y se tendrá que

$$U \backslash F = \left(\bigcup_{n=1}^{N} U_n \backslash \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} U_n \backslash \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right).$$

Por la propiedad (1) y la monotonía de μ la medida del primer término está acotada por $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} (U_n \backslash F_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(U_n \backslash F_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. El segundo término está contenido en $\bigcup_{n=N+1}^{\infty} U_n$, que vimos tiene medida menor o igual a $\dfrac{\varepsilon}{2}$, y por lo tanto $\mu(U \backslash F) \leq \varepsilon$, con lo que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.
Propuesto: verificar que los conjuntos utilizados pertenecen a $\mathcal{B}$, con lo que es válido emplear las propiedades de la medida μ.

iii) Como $\mathcal{F}$ es cerrado para complementos y contiene a los conjuntos cerrados de X, tenemos que para $\mathcal{O}$ el conjunto de abiertos:

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$$

donde la segunda inclusión es por definición de $\mathcal{F}$. Tomando σ-álgebra engendrada y usando la monotonía de esta operación sobre clases, tenemos que

$$\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$$

Pero $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}$ son σ-álgebras y $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$, por lo que

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$$

Con lo que se tiene la igualdad, es decir, todo boreliano cumple la propiedad.

b) Notemos que por la finitud de μ la condición de finitud de la medida de compactos se cumple directamente. Dados $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ compactos tales que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = X$, definimos la sucesión de conjuntos $C_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. Estos conjuntos son compactos por ser uniones finitas de compactos, y forman una sucesión creciente de conjuntos medibles (pues son cerrados ya que X es espacio métrico) tales que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un conjunto medible, dado $\varepsilon > 0$ por la parte a) existen U abierto, F cerrado tales que $\mu(U\backslash F) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. En particular $0 \leq \mu(U) - \mu(B) = \mu(U\backslash B) \leq \mu(U\backslash F) \leq \varepsilon$, y tenemos la aproximación exterior en medida de conjuntos por abiertos.

Notemos que los conjuntos $F_n = F \cap C_n$ son compactos (cerrados contenidos en compactos) y crecientes a F, luego $\mu(F_n) \nearrow \mu(F)$, y entonces existe N tal que $0 \leq \mu(F) - \mu(F_N) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pero entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(B) - \mu(F_N) &= \mu(B) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(F_N) \\ &= \mu(B\backslash F) + \mu(F) - \mu(F_N) \\ &\leq \mu(U\backslash F) + \mu(F) - \mu(F_N) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir, F_N es un compacto que aproxima interiormente a B en medida salvo error ε, y tenemos entonces que μ es regular.