Auxiliar 1: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Leonardo Sepúlveda - Felipe Subiabre
7 de agosto de 2012

P1. Para un conjunto S de reales no negativos se define la suma de sus elementos $\sum_{x\in S} x$ como el supremo de las sumas a lo más numerables elementos en S.

a) Demuestre que si $\sum_{x\in S} x < \infty$ entonces S es a lo más numerable.

Sea $\mathcal{S}$ una sigma-álgebra infinita.

b) Pruebe que $\mathcal{S}$ contiene una secuencia infinita de conjuntos disjuntos.

c) Pruebe que $|\mathcal{S}| \geq c$

Considere X un conjunto de cardinal $\aleph_1$, correspondiente al conjunto de ordinales finitos o numerables.

d) Pruebe que si una medida finita μ está definida sobre todos los subconjuntos de X y se anula en sus singletons, entonces μ es idénticamente nula.

P2. Sea (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ su tribu boreliana y $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida finita.

a) Probar que todo boreliano $B \in \mathcal{B}$ satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists F \subseteq X \text{ cerrado})(\exists U \subseteq X \text{ abierto}) \ F \subseteq B \subseteq U \text{ y } \mu(U \backslash F) \leq \varepsilon$$

Para ello se propone el siguiente esquema:

i) Probar que la propiedad es válida si B es cerrado.

ii) Defina $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} : \text{ la propiedad es cierta para } B\}$ y pruebe que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

iii) Concluya.

b) Demuestre que si (X, d) es σ-compacto, entonces μ es regular.

P3. Dada $\mathcal{E}$ una clase de subconjuntos de un espacio X, con $\emptyset \in \mathcal{E}$.

a) Demuestre que si $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$, entonces $\mathcal{S}$ se puede escribir como la unión de las sigma-álgebras de la forma $\sigma(\mathcal{F})$, con $\mathcal{F}$ recorriendo todos los subconjuntos numerables de $\mathcal{E}$.

b) Sea Ω el conjunto de todos los ordinales finitos o numerables. Para $\alpha \in \Omega$ se definen por inducción transfinita las clases $\mathcal{E}_\alpha$ como sigue:

- $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$
- $\mathcal{E}_\alpha$ contiene los conjuntos de la forma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde $A_n \in \mathcal{E}_{\beta_n}$ con $\beta_n < \alpha$, y los conjuntos de la forma A^c con $A \in \mathcal{E}_\beta$, $\beta < \alpha$.

Demuestre que $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{E}_\alpha$.

c) Pruebe que si la clase $\mathcal{E}$ es infinita de cardinal a lo más c, entonces $|\sigma(\mathcal{E})| = c$.