

GUÍA EJERCICIOS 2

- Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.
- Un estudiante debe llegar a su clase de las 8:30, para lo cual espera un autobús en el paradero. El autobús que pasa a las 7:30 tarda 40 minutos en llegar a la facultad, pero el autobús de las 7:40 tarda 50 minutos. Si el estudiante no alcanza el autobús de las 7:40, debe tomar el colectivo de las 7:45, que en 35 minutos lo deja en la facultad. Si la hora de llegada del estudiante al paradero se distribuye uniformemente entre las 7:25 y las 7:45, ¿cuál es el valor esperado de la hora de llegada a su clase?
- Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.
 - Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}(|X|)$.
- Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$. Muestre que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$
- Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.
- Se dispone de una urna con N bolitas numeradas de 1 a N . Se extraen bolitas con reposición de manera independiente hasta que haya salido cada bolita al menos una vez. Sea X la variable que denota la cantidad total de extracciones realizadas, y sea X_k la cantidad de extracciones desde la vez $k-1$ que aparece una bolita que no había salido antes (excluyendo esa extracción) hasta la siguiente vez que aparece una bolita que no ha salido antes (incluyendo esa extracción), para $k = 1, \dots, N$. Deduzca la distribución de cada X_k , y obtenga una expresión para $\mathbb{E}(X)$.
- Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X - \alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \text{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.
- La densidad de la variable aleatoria X es $f_X(x) = (ax + bx^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Se sabe además que el valor esperado de X es 0,6.
 - Calcule a y b .
 - Calcule F_X y $\mathbb{P}(X > 1/2)$.

c) Calcule $\text{var}(X)$.

- Se sabe que si dos variables son independientes, entonces su covarianza es 0. ¿Qué puede decir sobre la implicancia recíproca? *Indicación:* considere $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ y defina $Y = X^2$; muestre que $\text{cov}(X, Y) = 0$, pero X e Y no son independientes.
- Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* si su densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(x_m/x)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $x_m, \alpha > 0$ son parámetros.

- ¿Cuál es el valor de c ?
 - ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X ? Calcule $\mathbb{E}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.
 - ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X ? Calcule $\text{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.
 - ¿Cuál es la distribución de $\log(X/x_m)$?
- Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t) = e^{2e^t-2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1-e^t/2}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

- Sea X una variable aleatoria con distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1-b^2 t^2)$ para $|t| < 1/b$.
 - Calcule la esperanza y varianza de X .
 - Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?
 - Sean $Y_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \exp(\lambda_2)$ variables independientes. Pruebe que $\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2$ tiene distribución de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$.
- Sea X variable aleatoria con distribución *chi-cuadrado con n grados de libertad*, anotado $X \sim \chi_n^2$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$

donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\theta-1} dz$ es la función Gamma.

- Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}$ para $t < 1/2$.
- Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\text{var}(X)$.
- Si Y es una variable normal estándar, muestre que $Y^2 \sim \chi_1^2$. Utilice el hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

- d) Concluya que si $X_1, \dots, X_n$ son normales estándar independientes, entonces $X_1^2 + \dots + X_n^2$ tiene distribución χ_n^2 . *Indicación:* utilice las propiedades de la f.g.m.

14. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-x^2}}{y^2 + 1}$$

para todo x e y .

- a) ¿Son independientes? Explique.
b) Calcule las densidades marginales. ¿Qué variables conocidas son X e Y ?
15. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

- a) Encuentre la función densidad conjunta para las variables U y V .
b) Encuentre las densidades marginales para U y V .
16. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) ¿Son independientes? ¿Qué tipo de variables son?
b) Dado $\alpha > 0$, muestre que $\mathbb{P}(Y \geq \alpha X) = 1/(1 + \alpha)$.
c) Determine la función de distribución acumulada de la variable $X/(X + Y)$. ¿Qué tipo de variable es?
17. Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Determine la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = X/Y$. Muestre que X/Y tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

18. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) Encuentre las densidades marginales de X e Y .
b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.
c) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y = y)$.
19. La cantidad de llamadas telefónicas recibidas en una empresa durante t horas es una variable Poisson(μt). Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. La duración de la falla es una variable exponencial de parámetro λ . Sea X la cantidad de llamadas no atendidas durante la falla.
- a) Utilizando esperanzas condicionales, calcule $\mathbb{E}(X)$.

- b) Para $k = 0, 1, \dots$, calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Concluya que $X + 1$ es una variable geométrica de parámetro $p = \lambda/(\lambda + \mu)$. Obtenga nuevamente $\mathbb{E}(X)$. *Indicación:* utilice la regla de probabilidades totales; para calcular la integral, construya la densidad de una variable Gamma adecuada.

20. Se lanza n veces de manera independiente una moneda con probabilidad p de cara, donde p es el resultado de la realización de otra variable aleatoria U con distribución $\text{unif}(0, 1)$, independiente de los lanzamientos. Sea X la cantidad de caras que se obtienen. Demuestre que para todo $i = 0, \dots, n$ se tiene que $p_X(i) = \frac{1}{n+1}$. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ condicionando en los posibles resultados de U ; utilice sin demostrar el hecho que

$$\int_0^1 p^i (1-p)^{n-i} dp = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}.$$

21. Sea $\vec{X} = (X, Y)$ un vector normal bivariado, y sean $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Muestre que $\vec{Y} = \vec{b} + A\vec{X}$ también es un vector normal bivariado.
22. Sea $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ un vector normal multivariado en $\mathbb{R}^n$. Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, y definamos $\vec{Y} = \vec{v} + B\vec{X}$. Muestre que $\vec{Y}$ también es un vector normal multivariado y encuentre sus parámetros.
23. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ un vector normal multivariado. Muestre que $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes si y sólo si $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\forall i \neq j$.
24. En un banco llegan clientes siguiendo un proceso de Poisson con tasa de 3 clientes por minuto. Además, cada una de las 4 cajas disponibles atiende clientes siguiendo un proceso de Poisson (independiente a la llegada de los clientes al banco y de las otras cajas), de manera que el valor esperado del tiempo que un cliente tarda en una caja es de 2 minutos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 2 minutos lleguen exactamente 4 clientes?
b) ¿Cuál es la tasa de atención conjunta de las cajas?
c) Suponga que surge una falla en el sistema computacional del banco, por lo cual las cajas dejan de atender clientes. El tiempo que tarda el sistema en volver a funcionar es una variable exponencial de parámetro $\lambda = 0.2$. ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de clientes que llegan al banco durante la falla del sistema?
25. Un cazador sabe que en el sector que él caza se avistan pájaros a tasa de λ pájaros por hora.
- a) Calcule la probabilidad que el cazador aviste más de M pájaros en 1 hora.
b) Suponga ahora que el cazador caza a un pájaro avisado con probabilidad p . Calcule la probabilidad que cace exactamente k pájaros en t horas. *Indicación:* Condicione en el número de pájaros avistados.
c) Llamemos N_t a la cantidad de pájaros cazados hasta el tiempo t . En base a lo obtenido en el ítem anterior, ¿qué puede decir acerca de $(N_t)_{t \geq 0}$?