Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta Control 1

P1. (a) 1) La cantidad buscada es

$$\binom{60}{20, 20, 20},$$

correspondiente a las formas de escoger 20 asientos para los turistas ingleses, 20 para los franceses, y 20 asientos que quedarán vacíos.

2) La cantidad buscada es

$$\binom{30}{10}\binom{40}{20}.$$

El primer término corresponde a las formas de escoger 10 de los 30 pares de asientos en los cuales se ubicarán los turistas franceses. El segundo término son las formas de ubicar a los turistas ingleses en los 40 asientos restantes.

3) Notemos que de los 30 pares de asientos, exactamente 20 quedarán con sólo 1 asiento ocupado, mientras que el resto de los pares quedarán con ambos asientos ocupados. La cantidas buscada es entonces

$$\binom{30}{20} 2^{20} \binom{40}{20}.$$

El primer término corresponde a escoger 20 de los 30 pares que quedarán con un asiento vacío. El segundo término corresponde a la cantidad de formas de escoger cuál de los 2 asientos de cada uno de esos 20 pares quedará vacío. El último término corresponde a escoger 20 de los 40 asientos previamente fijados en los cuales irán los turistas ingleses (los franceses se ubican en los 20 restantes).

(b) El rango de X es el conjunto $\{2, \dots, n+1\}$, pues se necesitan al menos 2 lanzamientos para que ocurra una repetición, y a lo más se realizan $n+1$, pues en el lanzamiento $n+1$ necesariamente se repite alguna de las n caras. Calculemos $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$: para que $X = k$ debe tenerse que los primeros $k-1$ lanzamientos tuvieron resultados distintos, y el lanzamiento k fue alguno de los anteriores. Es decir:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}^{k-1 \text{ primeros}}\overbrace{(k-1)}^{k\text{-ésimo}}}{\underbrace{n^k}_{\text{casos totales}}}.$$

P2. (a) 1) Consideremos los eventos

B : el fósforo está bueno

E : el fósforo enciende en el primer intento.

Queremos calcular $\mathbb{P}(B^c \mid E^c)$. Por la regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(B^c \mid E^c) = \frac{\mathbb{P}(E^c \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(E^c)}.$$

Sabemos que si el fósforo está malo, nunca encenderá, por lo cual $\mathbb{P}(E^c \mid B^c) = 1$. Además, es claro que $\mathbb{P}(B^c) = m/(n+m)$. Para calcular $\mathbb{P}(E^c)$ utilizamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E^c) &= \mathbb{P}(E^c \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E^c \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)\\ &= (1-p) \times \frac{n}{n+m} + 1 \times \frac{m}{n+m}\\ &= 1 - p\frac{n}{n+m}.\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad buscada es

$$\mathbb{P}(B^c \mid E^c) = \frac{1 \times \frac{m}{n+m}}{1 - p\frac{n}{n+m}} = \frac{m}{(1-p)n + m}.$$

2) Consideremos el evento F correspondiente a que el fósforo escogido enciende en el segundo intento. Queremos calcular $\mathbb{P}(F \mid E^c)$. Por definición de probabilidad condicional y luego por regla de probabilidades totales, tenemos:

$$\mathbb{P}(F \mid E^c) = \frac{\mathbb{P}(FE^c)}{\mathbb{P}(E^c)} = \frac{\mathbb{P}(FE^c \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(FE^c \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(E^c)}.$$

Sabemos que $\mathbb{P}(FE^c \mid B^c) = 0$, pues si el fósforo está malo nunca encenderá. Por enunciado, los eventos E y F son independientes una vez que se sabe que el fósforo está bueno, por lo cual $\mathbb{P}(FE^c \mid B)$ es igual a $\mathbb{P}(F \mid B)\mathbb{P}(E^c \mid B)$, es decir, igual a $p(1-p)$. Utilizando lo obtenido para $\mathbb{P}(E^c)$ en el ítem anterior, obtenemos:

$$\mathbb{P}(F \mid E^c) = \frac{p(1-p)\frac{n}{n+m}}{1 - p\frac{n}{n+m}} = \frac{p(1-p)n}{(1-p)n + m}.$$

3) Sea G_k el evento en que se deshecha el fósforo, de modo que $P_k = \mathbb{P}(B \mid G_k)$. Utilizando la regla de Bayes, tenemos:

$$P_k = \frac{\mathbb{P}(G_k \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(G_k)}.$$

G_k equivale a que los primeros k intentos el fósforo no enciende, por lo cual $\mathbb{P}(G_k \mid B) = (1-p)^k$. Para calcular $\mathbb{P}(G_k)$ utilizamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_k) &= \mathbb{P}(G_k \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G_k \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)\\ &= (1-p)^k \times \frac{n}{n+m} + 1 \times \frac{m}{n+m},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que cuando el fósforo está malo, no prenderá en todos los intentos. Entonces:

$$P_k = \frac{(1-p)^k \frac{n}{n+m}}{(1-p)^k \frac{n}{n+m} + \frac{m}{n+m}} = \frac{(1-p)^k n}{(1-p)^k n + m}.$$

Para encontrar el k deseado, imponemos $P_k \leq \alpha$ y despejamos k:

$$\begin{aligned}\frac{(1-p)^k n}{(1-p)^k n + m} &\leq \alpha\\ \frac{n + (1-p)^{-k} m}{n} &\geq \frac{1}{\alpha}\\ (1-p)^{-k} &\geq \frac{n(1-\alpha)}{m\alpha}\\ -k\log(1-p) &\geq \log\frac{n(1-\alpha)}{m\alpha}.\end{aligned}$$

Es decir, el mínimo k tal que lo anterior se cumple corresponde a

$$k^* = \left\lceil \frac{\log m\alpha - \log n(1-\alpha)}{\log(1-p)} \right\rceil.$$

(b) Calculemos la densidad de $Y = Z^2$. Para esto, calculamos su distribución acumulada. Para $y > 0$, tenemos:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Z^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_Z(z)dz = 2\int_0^{\sqrt{y}} f_Z(z)dz,$$

donde en el último paso hemos utilizado la simetría de la densidad $f_Z(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Derivando con respecto a y, aplicando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, obtenemos:

$$f_Y(y) = 2\frac{d}{dy}\int_0^{\sqrt{y}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz = \frac{e^{-\sqrt{y}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{y^{-1/2}e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Esto vale para $y > 0$. Para $y \leq 0$ se tiene que $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$, pues Z^2 es siempre no-negativa. Por lo tanto, obtenemos lo deseado:

$$f_Y(y) = \frac{y^{-1/2}e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y).$$

P3. (a) 1) Sea $Z = F(X)$. Calculemos la distribución acumulada de Z. Notemos que F es creciente, luego F^{-1} también lo es. Luego, para $z \in (0,1)$, tenemos:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(F(X) \leq z) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(z)) = F_X(F^{-1}(z)).$$

Sin embargo, sabemos que $F_X = F$, por lo tanto $F_X(F^{-1}(z)) = z$. Además, como $F(X) \in (0,1)$, se tiene que $\mathbb{P}(F(X) \leq z) = 0$ para $z \leq 0$, y $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1$ para $z \geq 1$. Es decir,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ z & \text{si } z \in (0,1), \\ 1 & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

En otras palabras, Z es una variable uniforme en $[0,1]$.

2) Sea $V = F^{-1}(Y)$, calculemos su distribución acumulada. Para $v \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$F_V(v) = \mathbb{P}(F^{-1}(Y) \leq v) = \mathbb{P}(Y \leq F(v)) = F_Y(F(v)).$$

Como $Y \sim \text{unif}(0,1)$, sabemos que $F_Y(y) = y$ para todo $y \in [0,1]$, en particular para $y = F(v)$. Luego,

$$F_V(v) = F(v), \ \forall v \in \mathbb{R}.$$

Es decir, V posee distribución acumulada igual a F.

(b) 1) Por contradicción: supongamos que existe $x \in \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$. Por hipótesis aplicada a $B = \{x\}$, existe $A \subseteq \{x\}$ tal que

$$0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(\{x\}).$$

Pero los únicos subconjuntos de $\{x\}$ son $\emptyset$ y $\{x\}$, lo que significa que $\mathbb{P}(A) = 0$ ó bien $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{x\})$. Esto contradice la desigualdad que satisface $\mathbb{P}(A)$.

2) Por contradicción: si Ω es finito o numerable, se puede escribir como la unión disjunta finita o numerable de sus singletons, y aplicando el axioma 3, tenemos:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in\Omega}\{x\}\right) = \sum_{x\in\Omega}\mathbb{P}(\{x\}).$$

Pero por la parte anterior, sabemos que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \Omega$. Obtenemos $1 = 0$, una contradicción.

3) Sea B tal que $\mathbb{P}(B) > 0$, y definamos $B_0 = B$. Como $\mathbb{P}(B_0) > 0$, existe $A_1 \subseteq B_0$ tal que $0 < \mathbb{P}(A_1) < \mathbb{P}(B_0)$. Definiendo $A_1' = B_0 \setminus A_1$, se tiene que $B_0 = A_1 \cup A_1'$ y la unión es disjunta, por lo tanto

$$\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1').$$

Esto implica que $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(B_0)/2$ ó bien $\mathbb{P}(A_1') \leq \mathbb{P}(B_0)/2$ (si no fuera así, se tendría $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1') > \mathbb{P}(B_0)$). Además, se tiene que $\mathbb{P}(A_1') = \mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(A_1) > 0$. Definimos entonces

$$B_1 = \begin{cases} A_1 & \text{si } \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(B_0)/2 \\ A_1' & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hemos construido $B_1 \subseteq B_0$ cumpliendo $0 < \mathbb{P}(B_1) \leq \mathbb{P}(B_0)/2$. Repitiendo el procedimiento para B_1, podemos encontrar $B_2 \subseteq B_1 \subseteq B_0 = B$ cumpliendo

$$0 < \mathbb{P}(B_2) \leq \mathbb{P}(B_1)/2 \leq \mathbb{P}(B_0)/4.$$

Así sucesivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $B_n \subseteq B$ tal que $0 < \mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(B)/2^n$. Dado $\varepsilon > 0$, para un cierto n suficientemente grande se tendrá $\mathbb{P}(B)/2^n < \varepsilon$. Tomando $A = B_n \subseteq B$, se tiene

$$0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)/2^n < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.