Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Examen

28 de noviembre de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. En el paradero de autobuses que usted utiliza todos los días pasan buses de las líneas A, B y C.

(a) (2,0 ptos.) Suponga que los buses de una misma línea son indistinguibles entre sí. Si en un cierto lapso de tiempo pasaron k buses, ¿de cuántas maneras distintas pudo ocurrir esto? Si se sabe que pasaron k_A, k_B y k_C buses de cada línea (con $k_A + k_B + k_C = k$), ¿cuántas maneras son ahora? (distinguiendo el orden de aparición en ambos casos)

Los tiempos (en minutos) que transcurren entre que pasa cada bus se modelan como variables independientes con ley exponencial de parámetro λ. La probabilidad de que un bus sea de la línea A (la única que a usted le sirve) es $p \in (0, 1)$, independiente de los otros buses. Anotemos G a la cantidad de buses que pasan hasta que llega el primer bus de la línea A (incluyéndolo), y T el tiempo total que usted está en el paradero.

(b) (2,0 ptos.) ¿Qué variable conocida es G? Muestre que $T \sim \exp(p\lambda)$. *Indicación:* para calcular $\mathbb{P}(T > t)$, condicione en los posibles resultados de G.

(c) (2,0 ptos.) Si usted estuvo en el paradero más de t minutos, ¿cuál es la probabilidad que el primer bus que pasó haya sido de la línea A?

P2. Consideremos constantes $k > 0$ conocida, y $\lambda > 0$, $C > 0$ desconocidas. Sea X variable aleatoria con densidad dada por

$$f_X(x) = Cx^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

(a) (1,2 ptos.) Muestre que $C = k/\lambda^k$.

(b) (1,2 ptos.) Muestre que $\mathbb{E}(X) = \lambda\Gamma(1 + 1/k)$. Recuerde que $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-y}y^{\theta-1}dy$.

(c) (1,2 ptos.) Muestre que $X^k \sim \exp(1/\lambda^k)$.

(d) (1,2 ptos.) Dada una muestra aleatoria $X_1, \dots, X_n$ proveniente de la distribución de X, muestre que el estimador de λ del método de máxima verosimilitud corresponde a

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k\right)^{1/k}.$$

(e) (1,2 ptos.) Muestre que $\hat{\lambda} \to \lambda$ casi seguramente cuando $n \to \infty$.

P3. (a) (3,0 ptos.) Un mismo producto se vende en 3 envases distintos llamados A, B y C. Se desea verificar si los clientes tienen preferencia por alguno de los envases, por lo cual se toma una muestra de $n = 180$ clientes, cuyos resultados se resumen en la tabla. Calcule el p-valor (o una aproximación) del test que verifica si existe alguna preferencia, y entregue la conclusión para $\alpha = 5\,\%$.

Envase	A	B	C
Cantidad clientes	50	73	57

(b) (3,0 ptos.) Dados los datos de la tabla, obtenga los coeficientes $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ con el método de mínimos cuadrados. Obtenga un intervalo de confianza para β_1 al nivel 95 %.

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	1	1	3

Indicación: recuerde que $\hat{\beta}_1 = \sum(x_i - \bar{x})Y_i / \sum(x_i - \bar{x})^2$; recuerde también que el estadístico adecuado para realizar el intervalo de confianza para β_1 corresponde a

$$T_1 = \left[\frac{(n-2)\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - Y_i)^2}\right]^{1/2} (\hat{\beta}_1 - \beta_1).$$