Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3
Probabilidades y Estadística
Primavera 2012

Guía ejercicios 1

1. Sean E y F eventos.
   a) Pruebe que $\mathbb{P}(EF^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF)$.
   b) Pruebe que $\mathbb{P}(E^cF^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.
   c) Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(EF)$.

2. Sean, E, F y G eventos. Pruebe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) \\ &\quad -\mathbb{P}(E^cFG) - \mathbb{P}(EF^cG) \\ &\quad -\mathbb{P}(EFG^c) - 2\mathbb{P}(EFG).\end{aligned}$$

3. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuados para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de $1/2$ ó más?

4. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Este se dice *no atómico* si $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.
   a) Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ no atómico y $x \in \Omega$. Muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
   b) Muestre que si Ω es numerable, $(\Omega, \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.
   c) Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ no atómico. Muestre que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \varepsilon$. *Indicación:* muestre el resultado para ε de la forma $\mathbb{P}(B)/2^n$.

5. Un mazo inglés (52 cartas) se revuelve y se van mostrando las cartas una por una. Dé un espacio muestral adecuado para describir este experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que la catorceava carta sea un as? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la catorceava carta?

6. En un examen que consta de 10 preguntas, un estudiante debe responder exactamente 7.
   a) ¿De cuántas formas puede el estudiante escoger las preguntas?
   b) Si además se le exige que conteste al menos 3 de las primeras 5 preguntas, ¿de cuántas formas puede escoger las preguntas?

7. En un curso de 40 alumnos deben formarse tres equipos de baby fútbol (5 jugadores) y uno de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si
   a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?
   b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

8. Considere n personas que se deben ordenar, dentro de las cuales hay un matrimonio. Si las personas se ordenan en una línea, ¿cuál es la probabilidad de que el matrimonio quede junto? ¿Cuál es esta probabilidad si las personas se ordenan en círculo?

9. De un equipo de 5 ingenieros y 7 técnicos debe constituirse una comisión de 2 ingenieros y 3 técnicos. ¿De cuántas formas puede hacerse si:
   a) todos son igualmente elegibles?
   b) hay un técnico en particular que debe estar en la comisión?
   c) hay un ingeniero y un técnico que no pueden escogerse simultáneamente?
   d) 2 de los 5 ingenieros también cuentan como técnicos? (distinguiendo el cargo asignado).

10. Una persona tiene que escoger 5 de sus 8 amigos para irse de viaje. ¿De cuántas formas puede escoger a los amigos si
    a) dos de ellos están peleados entre sí y no irán juntos?
    b) dos de ellos solo van si los invitan a ambos?

11. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define F_n como el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, n\}$. Dado $0 \leq k \leq n$, se define
$$A_k = \{f \in F_n : |\{i : f(i) = i\}| = k\},$$
es decir, A_k es el conjunto de funciones en F_n con exactamente k puntos fijos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.
    a) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.
    b) Se escoje una función al azar en F_n. Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k.
    c) Calcular p_n, la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.
    d) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} p_n = (e-1)/e$.

12. Una mujer tiene n llaves, de las cuales sólo una abre la puerta. Si va probando las llaves de a una al azar, descartando aquellas que no abren la puerta, ¿cuál es la probabilidad de que abra la puerta en el k-ésimo intento? Si no descarta las llaves que no funcionan, ¿cuál es esta probabilidad?

13. 45 personas indistinguibles suben a un bus vacío que tiene 60 asientos distinguibles ubicados de a pares, y cada persona se ubica en un asiento. ¿De cuántas formas pueden quedar ocupados los asientos si:
    a) no hay restricciones en la forma de sentarse?
    b) se utiliza al menos un asiento de cada par?
    c) se utiliza al menos un asiento de cada par, y hay 2 personas que pueden escoger sentarse o quedar de pie?

14. Dos cajas contienen fósforos buenos y fósforos malos. Suponga que la primera caja contiene n_1 fósforos buenos y n_2 fósforos malos, y la segunda caja contiene m_1 fósforos buenos y m_2 fósforos malos. Se elige una caja al azar, y de esa caja se elige un fósforo al azar. Calcule la probabilidad de que el fósforo elegido sea bueno.

15. Un ratoncito escoge al azar uno de tres posibles laberintos. Si escoge el primero, la probabilidad de que encuentre su queso de premio es de $1/2$, si escoge el segundo la probabilidad es de $1/4$, y si escoge el tercero la probabilidad es de $1/8$. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre su queso? Si se sabe que lo encontró, ¿cuál es la probabilidad de que haya escogido el primer laberinto?

16. Las monedas A y B tienen probabilidades de cara p y q, respectivamente, donde $p < q$. Se escoge una de las monedas al azar y se lanza n veces, y se observa que todos los lanzamientos salieron cara.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido la moneda A? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?
    b) Se vuelve a lanzar la moneda una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva a aparecer una cara? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?

17. Un avión se ha perdido, y se presume que está en una de 3 posibles zonas, de manera equiprobable. Denotemos α_i, para $i = 1, 2, 3$, la probabilidad de que una búsqueda encuentre el avión en la zona i cuando efectivamente está en esa zona. Se realizará una búsqueda en las tres regiones.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el avión?
    b) Dado que la búsqueda en la zona 1 no encontró al avión, calcule la probabilidad de que esté en la zona i, para $i = 1, 2, 3$.

18. Sean $E_1, \dots, E_n$ eventos independientes. Pruebe que

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(E_i)).$$

19. Sea $S = \{1, \dots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S.

    a) Pruebe que $\mathbb{P}(A \subseteq B) = (3/4)^n$. Indicación: condicione en la cantidad de elementos de B.
    b) Pruebe que $\mathbb{P}(AB = \phi) = (3/4)^n$.

20. Considere dos dados equilibrados que se lanzan simultáneamente. Sea X la variable aleatoria igual al producto de los dos dados. Describa el espacio muestral Ω, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ $i = 1, 2, \dots$ y finalmente calcule la función de distribución asociada a X.

21. Se dispone de una urna con n bolitas rojas indistinguibles entre sí, y m bolitas azules indistinguibles entre sí. Se van extrayendo bolitas al azar sin reposición y se ubican en una fila ordenada, hasta que se extraen todas las bolitas.

    a) ¿Cuántas posibles filas resultantes hay?
    b) Sea X el número de la extracción en que se acumulan r bolitas rojas (con $r \leq n$). Calcule la distribución de X.

22. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^{n}(Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \mathrm{geom}(p)$. Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una variable aleatoria absolutamente continua.

23. Sea F la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.

    a) Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?
    b) Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?

24. *a*) Sean X, Y variables aleatorias independientes, y sea $Z = \min(X, Y)$. Calcule F_Z en términos de F_X y F_Y.
    b) Sean $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$. ¿Cuál es la densidad de $Z = \min(X, Y)$?

25. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    a) ¿Cuál es el valor de c?
    b) ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?
    c) Calcule $\mathbb{P}(0 < X < 1/2)$.

26. Supongamos que la duración en minutos de las llamadas telefónicas siguen una distribución dada por la función

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{e^{-x/3}}{2}\right) - \left(\frac{e^{\lfloor -x/3 \rfloor}}{2}\right), \qquad \forall x \geq 0,$$

siendo X la variable aleatoria que mide la duración (en minutos) de una llamada telefónica. Calcular la probabilidad de que la duración de una llamada cualquiera sea:

    a) Superior a 6 minutos.
    b) Igual a 6 minutos.

27. *a*) Sea Z una variable $\mathrm{geom}(p)$. Muestre que $\mathbb{P}(Z > k) = (1 - p)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se sabe que el evento en que un teléfono celular de la marca A se rompe cuando cae al suelo tiene probabilidad p, independiente de las otras caídas. Para un celular de la marca B se cumple lo mismo, pero con probabilidad q de romperse, donde $q > p$. Usted se compra un celular y escoge al azar la marca, y después de k caídas aún funciona.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido la marca A? ¿Qué pasa cuando k es grande? Comente. *Indicación:* trabaje con la variable aleatoria X del número de la caída en que el celular se rompe. ¿Qué distribución tiene X cuando la marca es A?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que su celular vuelva a sobrevivir otras k caídas?
    d) Suponga que su celular efectivamente es de la marca A. Suponga también que la cantidad de caídas que ocurren mensualmente es una variable Y con distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Calcule la probabilidad de que su celular sobreviva un mes más. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, condicione en los posibles resultados de Y. Puede suponer que las variables X e Y son independientes.

28. *a*) Sean $X \sim \mathrm{geom}(p)$ e $Y \sim \mathrm{geom}(q)$ independientes. Muestre que $\min\{X, Y\} \sim \mathrm{geom}(p + q - pq)$. Interprete.
    b) Sean $X \sim \mathrm{bin}(n, p)$ e $Y \sim \mathrm{bin}(m, p)$ independientes. Muestre que $X + Y \sim \mathrm{bin}(n + m, p)$. Interprete. *Indicación:* para calcular $\mathbb{P}(X + Y = k)$, particione en los posibles resultados de X y utilice la identidad

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{n+m}{k}.$$