MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar Extra

Miércoles 28 de Noviembre de 2012

P1.- Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \quad x > 0, t > 0$$

Suponga que la varilla satisface una condición de Neumann en el origen $u_x(t,0) = 0, \forall t > 0$; que $\int_0^\infty |u(t,x)| dx < \infty$; y que inicialmente la varilla se encuentra en reposo $u_t(0,x) = 0$ en la posición $u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$.

a) Considere $v(t,\cdot)$ la extensión par de la función $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface la ecuación para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

b) Deduzca que la transformada de Fourier de $v(t,\cdot)$ es $\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t)$.

c) Concluya que la solución $u(t,x)$ se puede escribir en forma integral como

$$u(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t)\, ds$$

Ind: Recuerde que en la auxiliar 10 se demostró que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

P2.- Considere la ecuación de onda en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \Delta u \\ u(0,\vec{x}) &= f(\vec{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\vec{x}) &= g(\vec{x}) \end{aligned}$$

para $t > 0$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
Se sabe que, bajo ciertas hipótesis (de regularidad y decaimiento) sobre las condiciones iniciales f y g, las soluciones u de la ecuación de onda cumplen las siguientes propiedades:

i) $\exists M > 0$, $\|\nabla u(t,\vec{x})\| \le M \ \forall t > 0, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

ii) $\exists K > 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\vec{x})\right| \le \frac{K}{\|\vec{x}\|^3}$.

iii) u es de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$.

Bajo estas hipótesis pruebe que la energía asociada a la ecuación de onda:

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2} \|\nabla u\|^2 \, d\vec{x}$$

es constante en el tiempo y que se tiene la igualdad:

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} g(\vec{x})^2 + \frac{c^2}{2} \|\nabla f(\vec{x})\|^2 \, d\vec{x} \qquad \forall t > 0$$

Para esto siga los siguientes pasos:

a) Usando las propiedades (i), (ii) y (iii) demuestre que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \nabla u$$

Ind: Aplique la fórmula de Green $\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \int_\Omega \varphi \Delta \psi = \int_{\partial \Omega} \varphi \nabla \psi \cdot \vec{n}$ sobre $B(0, r)$.

b) Pruebe que:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = c^2 \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u$$

c) Pruebe que:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = -\frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} \|\nabla u\|^2$$

Ind: $\nabla \|\vec{x}\|^2 = 2\vec{x}$.

d) Concluya usando la siguiente propiedad

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} h(t, \vec{x})\, d\vec{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} h(t, \vec{x})\, d\vec{x}$$

P3.- Sean $T_n = \sum_{k=1}^n z^k$, $S_n(z) = \sum_{k=1}^n k z^k$. Pruebe la siguiente identidad:

$$S_n(z) = \frac{T_n(z) - n z^{n+1}}{1 - z}$$

Calcule el radio de convergencia de $S(z) = \sum_{k=1}^\infty k z^k$ y deduzca su valor explícitamente utilizando la identidad previamente probada.

P4.- Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N}$ calcule las siguientes integrales:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a - \cos(\theta)} d\theta \qquad \text{y} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{a - \cos(\theta)} d\theta$$