MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 12

Martes 13 de Noviembre de 2012

P1.- Encuentre una solución de la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + u = 0$$

en la región $\Omega = [0,1] \times [0,2]$ con condiciones de borde

$$u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \quad \text{y} \quad u(x,2) = x(1-x) \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

P2.- Considere la ecuación del calor en una esfera sólida de radio R y difusividad térmica $\alpha > 0$:

$$u_t = \alpha \Delta u, \quad x \in B(0,R) \subset \mathbb{R}^3, \ t > 0$$

Buscamos soluciones con simetría esférica, vale decir, $u = u(t,r)$ con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

a) Expresando el laplaciano en coordenadas esféricas, muestre que $u = u(t,r)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru).$$

b) Usando separación de variables pruebe que esta ecuación admite soluciones del tipo

$$U(t,r) = \exp(-\alpha \beta^2 t) \frac{a \operatorname{sen}(\beta r) + b \cos(\beta r)}{r}$$

con a, b, β constantes a determinar.

c) Pruebe que basta tomar $b = 0$ para que la solución encontrada en la parte (b) satisfaga la condición de borde en $r = 0$ dada por $\lim_{r \to 0} \frac{\partial U}{\partial r}(t,r) = 0$, para $t > 0$.

d) Determine constantes $\beta = \beta_k$, $k = 1, 2, ...$, tales que se satisfaga además la condición de borde $u(t,R) = 0$ para $t > 0$.

e) Concluya que la solución de la ecuación del calor en la esfera con las condiciones de borde dadas en las partes (c) y (d), es de la forma

$$u(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\alpha \beta_k^2 t) \frac{\operatorname{sen}(\beta_k r)}{r}$$

y encuentre los coeficientes A_k en términos de la condición inicial $u(0,r) = f(r)$, $r \in [0,R]$.