MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 8

Martes 9 de Octubre de 2012

P1.- Demuestre que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz,$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra el origen, y que se recorre en sentido antihorario. Usando lo anterior, pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}.$$

P2.- Sea f una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

a) Demuestre la siguiente equivalencia: Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ y dos reales positivos a y b tales que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$ ssi f es un polinomio de grado a lo más k.
Ind: Utilice las desigualdades de Cauchy.

b) Suponga que $f(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$.

   i) Demuestre que existen $a, b > 0$ tales que $|f(z)| \leq a + b|z|, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
   Ind: Muestre que la función $g(z) = (f(z) - f(0))/z$ puede extenderse de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$.

   ii) Utilice la parte anterior para concluir que f es necesariamente constante en todo $\mathbb{C}$.

P3.- Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2 \sinh(z)} dz$, con la circunferencia $|z| = 4$ recorrida en sentido antihorario.

Teoremas Importantes

- **Fórmula de Cauchy:** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

  donde $\partial D(p,r)$ es la circunferencia de centro p y radio $r > 0$ recorrida en sentido antihorario.

- **Desarrolo en serie de Taylor:** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en un abierto Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. Entonces, existe una sucesión de constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n, \quad \forall z \in D(p,r),$$

  y más aún

$$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw,$$

  donde $\partial D(p,r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

- **Desigualdades de Cauchy:** Sea Ω abierto, $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. Si definimos $M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|$. Entonces

$$\forall k \geq 0, \ |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

- **Teorema de Liouville:** Si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función acotada entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

- **Teorema de los Residuos:** Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y sea P el conjunto de todos sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ y tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ y más aún

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, p_j).$$