MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 7

Martes 2 de Octubre de 2012

P1.- a) Pruebe que para $b \in (-1,1)$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1-b^2+x^2}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Ind: Integre $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{1}{4b}\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

P2.- Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

a) Dado $\theta_0 \in (0, 2\pi)$, pruebe que si

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^{\theta_0} \left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta = 0 \tag{1}$$

entonces se tiene

$$e^{i\theta_0}\int_0^\infty f(e^{i\theta_0}x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$$

siempre que $\int_0^\infty f(x)dx$ exista.

b) Pruebe que $f(z) = e^{-z^2}$ satisface (1) para todo $\theta_0 \in (0, \pi/4)$.

c) Calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(x^2)dx \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen}(x^2)dx$$

Ind: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$