MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 6

Martes 25 de Septiembre de 2012

P1.- Encuentre el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1} \left(\frac{2}{3i}\right)^n (4i-z)^n$$

P2.- Se definen la funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico de la siguiente forma:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

a) Demuestre que

i) $\cosh z = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

ii) $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

donde $z = x + iy$.

b) Demuestre que

$$\cosh' z = \operatorname{senh} z \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}' z = \cosh z$$

P3.- Considere la serie $S(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ con $a_k = 2$ si k es par y $a_k = 1$ si k es impar. Determine el radio de convergencia R de esta serie y pruebe que converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| \geq R$. Compruebe que para $|z| < R$ se tiene

$$S(z) = \frac{2+z}{1-z^2}.$$

P4.- a) Encuentre el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde la función

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

es holomorfa. Demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir, $f(z) = \arctan(z)$.

b) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$ explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.

P5.- Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f''(z) = 2f(z) + 1$ con $f(0) = 1,\ f'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencias de f en torno a 0 y determine su radio de convergencia.