MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar Recuperativa

Miércoles 12 de Septiembre de 2012

P1.- Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 + y)$ y la curva C definida como la intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ con la semiesfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$, $x \leq 0$, orientada de abajo hacia arriba.

a) Calcule el rotor de $\vec{F}$ y deduzca que el campo $\vec{F}$ es la suma de dos campos $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ donde $\vec{F}_1$ es conservativo y $\vec{F}_2$ tiene la forma $\vec{F}_2(x,y,z) = (0,0,g(y))$.

b) Encuentre un potencial de $\vec{F}_1$.

c) Calcule la integral de $\vec{F}$ sobre la curva C.

P2.- Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^3 y considere

- $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 < z < 1\}$
- $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z,\ z \leq 1\}$ orientada exteriormente
- $T = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1\}$ orientada hacia arriba
- $C = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\}$ orientado de forma antihoraria (visto desde arriba)

a) Pruebe que

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{F}) = \nabla \mathrm{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$$

donde $\Delta\vec{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$, con $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

b) Demuestre que

$$\int_S \nabla \mathrm{div}\vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_S \Delta\vec{F} \cdot d\vec{A} - \int_C \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

c) Pruebe que

$$\int_D \Delta \mathrm{div}\vec{F}\, dV = \int_S \nabla \mathrm{div}\vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_T \nabla \mathrm{div}\vec{F} \cdot d\vec{A}$$

d) Concluya que

$$\int_D \Delta \mathrm{div}\vec{F}\, dV = \int_S \Delta\vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_T \nabla \mathrm{div}\vec{F} \cdot d\vec{A} - \int_C \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{r}$$