MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 5

Martes 11 de Septiembre de 2012

P1.- Para las siguientes funciones, determine aquéllas que son holomorfas en todo $\mathbb{C}$ y calcule su derivada:

a) $f(z) = \overline{z}$.
b) $f(z) = e^{x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.
c) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.
d) $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, $z = x + iy$.

P2.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω, entonces $u + iv$ es constante.

P3.- Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|,\ z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0.

P4.- Se sabe que $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ corresponde a la parte real de una función holomorfa f. Encuentre la parte imaginaria $v(x, y)$ sabiendo que $f(1) = 1 - i$.

P5.- Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Considere los campos en $\mathbb{R}^3$ definidos por $\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\hat{\imath} + v(x, y)\hat{\jmath}$ y $\vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\hat{\imath} - u(x, y)\hat{\jmath}$.

a) Pruebe que $\vec{w}$ y $\vec{w}_1$ son conservativos si y sólo si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, en cuyo caso decimos que u y v son funciones *conjugadas*.
b) Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase C^2, entonces $\Delta u = \Delta v = 0$ (decimos que u y v son armónicas) y además $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
c) Pruebe que si $u(x, y)$ es armónica, entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u.
Indicación: Note que lo anterior es equivalente a probar que un cierto campo es conservativo.