MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 2

Martes 14 de Agosto de 2012

P1.- Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\}$ la superficie *Papa Frita* y el campo $\vec{F}(\rho, \theta) = (\frac{\rho-1}{\rho} \operatorname{sen}\theta)\hat{\rho} + (\cos\theta + 1)\hat{\theta}$ en coordenadas cilíndricas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de S, orientada según la normal exterior al cilindro.

P2.- Definamos el campo $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \cos\theta\hat{k}$ en coordenadas cilíndricas.

a) Determine la región del espacio donde $\vec{F}$ es de clase C^1 y calcule su divergencia en esta región.

b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entre los planos $z = 1$ y $z = -1$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ, orientada según la normal exterior a la esfera.

c) Repita el análisis anterior para el campo $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}$.

P3.- Pregunta 4 de la Auxiliar 1 usando el teorema de la divergencia.
Considere el campo $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta \operatorname{sen}^3\varphi\hat{\theta}$ en coordenadas esféricas. Recuerde que el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ es $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\}$ $(\theta \neq 2\pi)$. Sea Ω la región de la esfera unitaria que intersecta al cono infinito $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Sea $\Omega_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \Omega : x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\}$ para $\varepsilon > 0$ pequeño. Calcule $I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\vec{F}\, dV$ usando adecuadamente el teorema de la divergencia.

P4.- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo, acotado, de frontera $\partial\Omega$ regular y orientable.

a) Demuestre que si $\phi, \psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2, entonces se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_{\partial\Omega} \psi\nabla\phi \cdot \hat{n}\, dA = \int_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\Delta\phi\, dV$$

Donde $\hat{n}$ representa la normal exterior.
Indicación: Recuerde que si f es un campo escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial, entonces $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\operatorname{div}(\vec{F})$.

b) Sean f y g funciones continuas. Demuestre que si $u_1, u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 tales que:

$$\begin{aligned} \Delta u_i(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \Omega,\ i = 1, 2 \\ \nabla u_i \cdot \hat{n}(x) &= g(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ i = 1, 2 \end{aligned}$$

y además, $\exists x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. Entonces $u_1(x) = u_2(x)\ \forall x \in \Omega$.