MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2012-2.
Profesor: Mauricio Duarte
Auxiliar: Ignacio Vergara

Auxiliar 1

Martes 7 de Agosto de 2012

P1.- a) Demuestre que si $f = f(\rho, \theta, z)$ es un campo escalar y $\vec{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k}$ un campo vectorial, ambos expresados es coordenadas cilíndricas, entonces

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \quad \text{y} \quad \text{div} F = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(F_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}F_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(F_z \rho)\right]$$

b) Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho e^{-\theta}\hat{\theta} + z e^{-\theta}\hat{k}$. Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y demuestre que $\text{div}\vec{F} = 0$ en dicho dominio.

P2.- Un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 se dice central si es radial y depende sólo de la distancia al origen, esto es, si el campo se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r)\hat{r}, \quad r > 0.$$

para alguna función $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo central $\vec{F}$ es irrotacional, es decir, $\text{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$.

b) Verifique que si $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r)\hat{r}$, entonces

$$\text{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r) r^2).$$

Deduzca que un campo central $\vec{F}$ es solenoidal ($\text{div}\vec{F} \equiv 0$) en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ si y sólo si

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2}\hat{r},$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$. Concluya que todo campo central solenoidal admite un potencial de la forma $V(r) = \frac{K}{r} + C$ para ciertas constantes $K, C \in \mathbb{R}$.

P3.- a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1. Demuestre que

$$\text{rot} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)\, dt = \int_a^b \text{rot}\varphi(\vec{r}, t)\, dt.$$

Indicación: Puede serle útil la regla de Leibnitz: $\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b \varphi(\vec{r}, t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r}, t)\, dt$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y u representa cualquier variable cartesiana.

b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Verifique que $\text{div}\vec{F} = 0$ y pruebe que

$$\text{rot}[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}). \tag{1}$$

c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que div$\vec{F} = 0$ en una bola $B \subset \mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar que (1) es válida en B. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]\, dt$. Usando lo anterior concluya que rot$\vec{G} = \vec{F}$ en B.

P4.- Considere el campo $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta \operatorname{sen}^3 \varphi\hat{\theta}$ en coordenadas esféricas. Calcule div$\vec{F}$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$. Sea Ω la región de la esfera unitaria que intersecta al cono infinito $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Sea $\Omega_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \Omega : x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\}$ para $\varepsilon > 0$ pequeño. Bosqueje Ω_ε y calcule $I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\vec{F}\, dV$.

P5.- Calcule el gradiente de

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{x^2 + y^2 + z^2}$$