Examen - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 30 de Noviembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Parte 1.

(a) Calcule el flujo del campo $\overrightarrow{F} = (0, e^{\sin(xz)} + \tan(z), y+1)$ a través del semi-elipsoide
$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6,\ z \geq 0$, considerando la normal que apunta hacia arriba.

(b) Calcule la integral de trabajo $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ para el campo $\overrightarrow{F}(x,y) = (y^2, x)$ sobre $\partial\Omega$= el borde orientado positivamente del cuadrado $\Omega = [0,2] \times [0,2]$.

Parte 2.

(a) Encuentre el desarrollo en serie de potencias (en $\mathbb{C}$) de $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ en torno a $z = 1$ y determine su radio de convergencia.

(b) Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}$. Para ello, considere la integral compleja $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz$ con $C =$ círculo de centro 0 y radio 1.

Parte 3.

Se define el Bi-Laplaciano de u como: $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

(a) **(1 Punto)** Sea $u \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Pruebe que:

$$\Delta^2 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$$

En lo que sigue, considere el problema

$$
\begin{array}{lll}
\text{(EQ)} & \Delta^2 u = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \\
\text{(CB)} & u(x,0) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\
 & u_y(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\
 & \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\
 & x \to u(x,y), f(x), g(x) \text{ integrables} &
\end{array}
$$

(b) (1.5 Puntos) Si $\hat{u}$ es la transformada de Fourier de $u(\cdot, y)$ c/r a la variable x (para cada y fijo), deduzca que se tiene la ecuación:

$$\hat{u}_{yyyy} - 2s^2\hat{u}_{yy} + s^4\hat{u} = 0$$

Y pruebe que la solución general de esta ecuación es:

$$\hat{u}(s, y) = A(s)e^{-sy} + B(s)e^{sy} + C(s)ye^{-sy} + D(s)ye^{sy}$$

Indicación: Suponga soluciones de la forma $\hat{u} = e^{\lambda y}$ y recuerde que, si el polinomio caracteristico posee una raíz λ con multiplicidad dos, entonces $\hat{u} = ye^{\lambda y}$ también es solución.

(c) (1.5 Puntos) Deduzca imponiendo la condición $\lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0$ que

$$\hat{u}(s, y) = \hat{f}(s)e^{-|s|y} + (\hat{g}(s) + |s|\hat{f}(s))ye^{-|s|y}$$

(d) (2 Puntos) Concluya utilizando propiedades de convolución e inversión de la Transformada de Fourier que:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y^3}{((x-w)^2 + y^2)^2} f(w)\, dw + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(x-w)^2 + y^2} g(w)\, dw$$

Indicación: Recuerde que, si $a > 0$:

$$\widehat{\frac{a}{a^2 + x^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|s|}, \quad \widehat{\frac{a^3 - ax^2}{(a^2 + x^2)^2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a|s|e^{-a|s|}$$