

P1 | Queremos probar que

Aux 11 - CAA - 2012/2

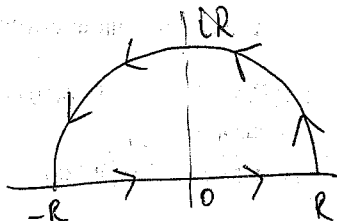
Prof: C. Conca
Aux: M. Godoy

1/10

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2, \text{ Consideremos } f(z) = \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1}$$

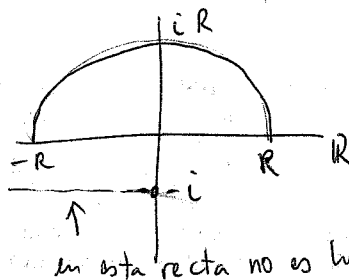
Integraremos en la región $\Gamma_R = \overset{\text{superior}}{\text{arco circ. radio } R} \cup [-R, R]$.

Osea en:



Notar que si bien $\text{Log}(z)$ no es holomorfo en $\mathbb{R}_-$, $\text{Log}(z+i)$ NO lo es en $\{z \mid z+i \in \mathbb{R}_-\} = M$

Osea:



gracias a esta observación,

f es meromorfa en $\mathbb{C}$
 ~~f es holomorfa en $\mathbb{C}$~~ $\forall \Omega$ abierto que no cumpla a M ($\Omega \cap M = \emptyset$)

Así, f es meromorfa $\forall R > 0$ en un abierto que encierra a Γ_R y no cumpla a M . Luego, por Tco. Residuos:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{P \text{ polo de } f} \text{Res}(f, P) \cdot \text{Ind}_{\Gamma_R}(P)$$

¿Polos de f ? Considerando el análisis donde $\text{Log}(z+i)$ es holomorfa, solo nos importan los pto $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
 $e^{i2\pi} = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow \theta_k = \frac{\pi+2k\pi}{2} \quad k \in \{0, 1\}$

Por factoriz. del polinomio obviamente son polos simples.

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/2} = i} \frac{(z-i) \cdot \frac{\text{Log}(z+i)}{(z+i)(z-i)}}{(z+i)(z-i)} = \frac{\text{Log}(2i)}{2i} = \frac{\log(2) + i \arg(2i)}{2i} = \frac{\log(2)}{2i} + \frac{\pi}{4}$$

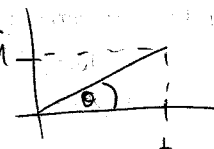
el otro residuo es irrelevante pues no es encerrado por Γ_R para ningún R .

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \left(\frac{\log(2)}{2i} + \frac{\pi}{4} \right) = \pi \log(2) + i \frac{\pi^2}{2}$$

Por otro lado:

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{\log(t+i)}{t^2+1} dt, \text{ pero } \log(t+i) = \log(\sqrt{t^2+1}) + i \arg(t+i) = \frac{1}{2} \log(t^2+1) + i \arg(t+i)$$

$p(t)=t, p'(t)=1$
 $t \in [-R, R]$

pero:  $\tan \theta = \frac{1}{t} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$

$$\Rightarrow \int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{\frac{1}{2} \log(t^2+1) + i \arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} dt + i \int_{-R}^R \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1} dt$$

Así, si probamos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$, entonces:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} f(z) dz = \underbrace{\pi \log(2) + i \frac{\pi^2}{2}}_{a+ib} \stackrel{\text{Residuos}}{\downarrow} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1} dt}_{c+id}$$

e igualando parte real:

$$\pi \log(2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} dt, \text{ y por paridad se concluye lo deseado.}$$

obs. igualando parte imag. tb. se concluye:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1} dt = \frac{\pi^2}{2}$$

Así pues, probemos lo pendiente: Pdg $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{SR} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = 0$.

3/10

Por un lado: $\int_{SR} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = \int_0^\pi \frac{\log(Re^{i\theta}+1)}{R^2 e^{2i\theta}+1} \cdot iRe^{i\theta} d\theta$
 $\uparrow$
 $r(\theta) = Re^{i\theta}, r'(\theta) = iRe^{i\theta}$

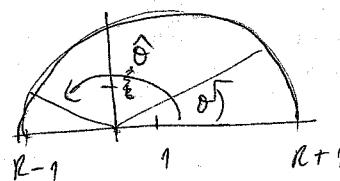
pero $\log(Re^{i\theta}+1) = \log|Re^{i\theta}+1| + i \arg(Re^{i\theta}+1)$, $\log|Re^{i\theta}+1| = \log \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + (R \sin \theta + 1)^2}$
 $= \frac{1}{2} \log(R^2 + 2R \sin \theta + 1)$

Luego:

$$\left| \int_0^\pi \frac{\log(Re^{i\theta}+1)}{R^2 e^{2i\theta}+1} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} \log(R^2 + 2R \sin \theta + 1) \cdot R}{R^2 - 1} d\theta + \int_0^\pi \frac{\arg(Re^{i\theta}+1) \cdot R}{R^2 - 1} d\theta$$

Para la segunda integral:

notar que $\arg(Re^{i\theta}+1) \leq \pi$ ($\theta \in [0, \pi]$)



Así: $\int_0^\pi \frac{\arg(Re^{i\theta}+1) R}{R^2 - 1} d\theta \leq \frac{R}{R^2 - 1} \int_0^\pi \pi d\theta = \pi^2 \frac{R}{R^2 - 1}$

Para la primera: Notar que $\log(R^2 + 2R \sin \theta + 1) \leq \log(R^2 + 2R + 1) = \log((R+1)^2) = 2 \log(R+1)$
 $\downarrow \sin \theta \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\log(R^2 + 2R \sin \theta + 1) \cdot R}{R^2 - 1} d\theta \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{2 \log(R+1) \cdot R}{R^2 - 1} d\theta = \frac{R \log(R+1)}{R^2 - 1} \cdot \pi$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{SR} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\pi^2 \frac{R}{R^2 - 1}}_0 + \pi \underbrace{\frac{R \log(R+1)}{R^2 - 1}}_0 = 0 \quad \text{y se concluye} \quad \square$$

pues se puede ver fácil por L'Hopital

4/10

P2) a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2z}{2az + z^2 + 1} \frac{dz}{iz}$

$= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$

Polos: $z^2 + 2az + 1 = 0$

$z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

$= 4\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1} \right)$ Notar que como $a > 1$.

$|-a - \sqrt{a^2 - 1}| = |a + \sqrt{a^2 - 1}| > |a| > 1$ fuera
 $-a + \sqrt{a^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 1} < 1 + a \Leftrightarrow a^2 - 1 < a^2 + 2a + 1$ de $|z| \leq 1$
 $0 < 2a \checkmark$
 $\Rightarrow \sqrt{a^2 - 1} < 1 + a$
 $\Rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1} < 1$
 $\Rightarrow$ dentro de $|z| \leq 1$

$= 4\pi i \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{1}{(z + a + \sqrt{a^2 - 1})} = 4\pi i \frac{1}{(-a + \sqrt{a^2 - 1} + a + \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$

b) $C_n(a) + iS_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{a - \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{a - \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{a - \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz}$

$= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{2az - z^2 - 1} \frac{dz}{z} = -\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 - 2az + 1} dz$

Polos: $z^2 - 2az + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

con $+ \sqrt{a^2 - 1} > 1 \times$.

con $- \sqrt{a^2 - 1} < 1$

$= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^n}{z^2 - 2az + 1}, a - \sqrt{a^2 - 1} \right)$

$a - 1 < \sqrt{a^2 - 1}$
 $a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1$
 $2a > 0 \checkmark$

$= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow a - \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z^n}{(z - a - \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{(a - \sqrt{a^2 - 1})^n}{\sqrt{a^2 - 1}}$

$\therefore C_n(a) = \pi \frac{(a - \sqrt{a^2 - 1})^n}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \forall n$

$= \pi \frac{(a - \sqrt{a^2 - 1})^n}{\sqrt{a^2 - 1}}$

$S_n(a) = 0 \leftarrow$ obvio por paridad.

Problema: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4} dx$

Teo. usado: Sean P, Q pol. primos entre sí, Q no posee ceros en $\mathbb{R}$
 γ tq $\text{gr}(P) > \text{gr}(Q) + 2 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im}(z)=0 \\ \text{Im}(z)>0}} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z\right)$ 5/10 1/1

Obs. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}$ es par i.e. $f(x) = f(-x)$ $\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4} dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$

Entonces basta consid $f(z) = \frac{z^2+3}{z^4+5z^2+4}$ y el contorno $\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Polos: $z^4+5z^2+4=0$. $w=z^2$. 

$w^2+5w+4=0 \Rightarrow w = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -4 \\ w_2 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ raíces: $z^2 = -4 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2i$

$z^2 = -1 \Rightarrow z_{3,4} = \pm i$

dentro del contorno? $2i, i$.
($R > 2$)

Obs. No son sing. remov. pues raíces del num. $\pm i\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Además $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $\text{gr}(P) = \text{gr}(Q) - 2 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$.

Por Res: $\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{P \text{ polo}} \text{Res}(f, P) \text{ind}_{C_R}(P) = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i))$ ($R > 2$)

Calculemos Res: ¡Polos simples!

$\Rightarrow \text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{z^2+3}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)} = \frac{-i^2+3}{2i \cdot -i \cdot 3i} = \frac{-2}{6i} = \frac{1}{3i}$

$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{z^2+3}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)} = \frac{-4+3}{i \cdot 3i \cdot 4i} = \frac{-1}{12i}$

$\therefore \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{3i} + \frac{-1}{12i} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = 2\pi \left(\frac{3-1}{12} \right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
 $= 2\pi i \left(\frac{1}{3i} + \frac{1}{12i} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = 2\pi \left(\frac{5}{12} \right) = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow$ en el $\lim \int_{C_R} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{5\pi}{12}$

P3/b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+1} dx \left(= \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2+1} dx \right) \right)$

6/10

Para resolverla usamos el Teo visto en clase:

Sea f meromorfa en $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ tq $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ $p > 1$

Dado $s > 0$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo de } f \\ \operatorname{Im}(p) > 0}} \operatorname{Res}(e^{isz} f(z), p)$$

En nuestro caso: $s = \pi > 0$ ✓ $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, que obviamente satisface la desigualdad con $p = 4 > 1$ ✓

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_f dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo de } f \\ \operatorname{Im} p > 0}} \operatorname{Res}(e^{i\pi z} \cdot f(z), p)$$

¿Polos de f ? raíces de $z^2+1: z^4 = -1 \Leftrightarrow e^{i2\theta} = e^{i(\pi+2k\pi)}$

vea: $z_0 = e^{i\pi/2}, z_1 = e^{i3\pi/2}$
 $= i, = -i$

$$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2k\pi$$

$$\theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

¿Quiénes quedan en H ? Solo $z_0 = i$
 Además obviamente son simples por factoriz. del polinomio.

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x} \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}, z_0\right) \right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}, e^{i\pi/4}\right) = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} (z - e^{i\pi/4}) \cdot \frac{e^{i\pi z}}{(z - e^{i\pi/4})(z + i)} = e^{i^2\pi} / 2i = e^{-\pi} / 2i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x} \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \cancel{2\pi i} \cdot \frac{e^{-\pi}}{\cancel{2i}} = \pi e^{-\pi}$$

7/10

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} dx = \pi e^{-\pi}$$

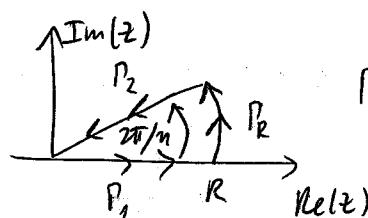
$$\circ \circ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+1} dx = \pi e^{-\pi}$$

(Sorry por los rayones ☺)

b) Si $n \geq m+2$ $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n+1} dx = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{n}(m+1))}$

8/10 (1)

Hint: (Si, lo daban) Considere el camino:



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

Sol. Sea $f(z) = \frac{z^m}{z^n+1}$. Calculemos $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz$

Por Teo Res: $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \text{ es polo}} \text{Res}(f, p) \text{ind}_{\Gamma}(p)$

los polos de f : $z^n+1=0 \Leftrightarrow z^n=-1$ ie. raíces n -ésimas de -1 .

Recorrido Raíces n -ésimas de un complejo cualquiera:

$z^n = w, w \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Si $z = |z| e^{i\theta} \Rightarrow z^n = w \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = |w| e^{i\varphi}$

$\Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$

o las n raíces de w : $z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$

En nuestro caso: $w = -1 = 1 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow$ las n raíces:

$|w|=1 \quad z_k = e^{i(\frac{\pi + 2k\pi}{n})} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$

Para $R > 1$ solo $z_0 = e^{i\pi/n}$ está ~~dentro del~~ encerrado por el camino

(pues $z_k = e^{i(\frac{\pi + 2k\pi}{n})}$ es tq $\arg(z_k) = \frac{\pi + 2k\pi}{n} > \frac{2\pi}{n}$ si $k > 0$.)

$\therefore \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, e^{i\pi/n})$

El orden del polo es 1 pues $z^n+1 \stackrel{!}{=} P(z)$ tiene n raíces distintas.

$\Rightarrow \text{Res}(f, e^{i\pi/n}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} (z - e^{i\pi/n}) \cdot \frac{z^m}{z^n+1} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} z^m \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} \frac{(z - e^{i\pi/n})}{z^n+1}$

forma 0/0



(2)

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, e^{i\pi/n}) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} z^m \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} \left(\frac{z - e^{i\pi/n}}{z^n + 1} \right) \text{ forma } 0/0, \text{ podemos usar q/l'o } L'H\acute{o}pital \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} z^m \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/n}} \frac{1}{nz^{n-1}} = e^{i\pi \frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{n \cdot e^{i\pi \frac{(n-1)}{n}}} = \frac{e^{i\pi \frac{m}{n}}}{n e^{i\pi \frac{(n-1)}{n}}} \\ &= \frac{e^{i\pi m/n}}{n e^{i\pi(1-\frac{1}{n})}} = \frac{e^{i\pi \frac{m}{n}}}{n e^{i\pi} \cdot e^{-i\pi/n}} = \frac{-e^{i\pi \frac{m}{n}}}{n e^{-i\pi/n}} = -\frac{e^{i\pi \frac{(m+1)}{n}}}{n} \end{aligned}$$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{-i\pi \frac{(m+1)}{n}} \quad (R > 1)$$

Veamos las integrales en cada camino (y como se comportan si $R \rightarrow \infty$)

P₁

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz \stackrel{\substack{\uparrow \\ \vec{r}(t)=t \\ t \in [0, R]}}{=} \int_0^R f(t) dt = \int_0^R \frac{t^m}{t^n + 1} dt = \int_0^R \frac{x^m}{x^n + 1} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n + 1} dx =: I$$

t es variable real (muda!).

P₂

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} f(z) dz &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \vec{r}(t)=te^{2\pi i/n} \\ t \in [0, R] \\ (\text{desde } R \text{ a } 0) \\ \vec{r}'(t)=e^{2\pi i/n} i}}{=} \int_R^0 \frac{t^m e^{i 2\pi m/n}}{t^m e^{i 2\pi} + 1} \cdot e^{2\pi i/n} i dt = - \int_0^R \frac{t^m e^{i 2\pi \frac{(m+1)}{n}}}{t^m + 1} dt \\ &= -e^{i 2\pi \frac{(m+1)}{n}} \int_0^R \frac{t^m}{t^n + 1} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -e^{-i 2\pi \frac{(m+1)}{n}} \cdot I. \end{aligned}$$

P₃

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz \stackrel{\substack{\uparrow \\ \vec{r}(\theta)=Re^{i\theta} \\ \theta \in [0, 2\pi/n] \\ \vec{r}'(\theta)=iRe^{i\theta}}}{=} \int_0^{2\pi/n} \frac{R^m e^{i\theta m}}{R^n e^{i\theta n} + 1} \cdot iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1} e^{i\theta(m+1)}}{R^n e^{i\theta n} + 1} d\theta$$

problemas que si $R \rightarrow \infty \Rightarrow \int_{\Gamma_3} f(z) dz \rightarrow 0$

En efecto:

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| = \left| i \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1} e^{i\theta(m+1)}}{R^n e^{i\theta n} + 1} d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1} \overbrace{|e^{i\theta(m+1)}|}^{=1}}{R^n \underbrace{|e^{i\theta n}|}_{=1}} d\theta = R^{m+1-n} \int_0^{2\pi/n} d\theta$$

$$= R^{m+1-n} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Como $n \geq m+2 \Rightarrow m+1-n < 0$.
 ie. $m+1-n = -\alpha$ $\alpha > 0$.

así: $\int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ pues $\alpha > 0$.

así, como $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{-2\pi i}{n} e^{-i\pi(\frac{m+1}{n})} \quad \forall R > 0$

Tomando $R \rightarrow \infty \Rightarrow I - e^{i2\pi(\frac{m+1}{n})} I + 0 = \frac{-2\pi i}{n} e^{-i\pi(\frac{m+1}{n})}$

luego $I(1 - e^{i2\pi(\frac{m+1}{n})}) = \frac{-2\pi i}{n} e^{+i\pi(\frac{m+1}{n})}$

$$\Rightarrow I = \frac{-\frac{2\pi i}{n} e^{+i\pi(\frac{m+1}{n})}}{1 - e^{i2\pi(\frac{m+1}{n})}} = -\frac{2\pi i}{n} \frac{1}{\left(\frac{1 - e^{i2\pi(\frac{m+1}{n})}}{e^{+i\pi(\frac{m+1}{n})}} \right)}$$

Si $\pi(\frac{m+1}{n}) = u \Rightarrow I = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1 - e^{2ui}}{e^{+ui}}} = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{e^{-ui} - e^{ui}} = \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{e^{iu} - e^{-iu}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\text{sen}(u)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}(m+1)\right)}$$