P1 a) $f(z) = \dfrac{(z^2-4)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = \dfrac{(z-2)(z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}$.

Recordemos primero un poco de terminología:

- $p \in \mathbb{C}$ es un punto singular aislado de $f(z)$ si $\exists R>0$ tq $f \in H(D(p,R)\setminus\{p\})$ pero f no es holomorfa en p.
- Se dice que p es pto. sing. evitable de f si es pto. sing. aislado y: $\lim\limits_{z\to p} f(z)\ \exists$.
- Se dice que p es polo de f, si p es punto sing. aislado y además $\exists\ m \geq 1$ tq:

$$\lim_{z\to p} (z-p)^m f(z)\ \exists \text{ y es no nulo}$$

El menor $m \geq 1$ que cumple esto se denomina orden del polo

---

En nuestro caso (y tal como dice el enunciado) obviamente los puntos $(\mathbb{Z} =) 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ etc. son singularidades aisladas de f. Veamos a que corresponde cada punto.

Sigamos el hint: $\lim\limits_{z\to n} \dfrac{\sin \pi z}{z-n} \overset{\text{forma } 0/0 \to \text{L'Hopital}}{=} \lim\limits_{z\to n} \dfrac{\pi \cos \pi z}{1} = \pi\cdot(-1)^n\ (\neq 0\ \forall n!)$

Separemos el estudio de las singularidades en 3 casos:

Caso 1: $n \in \mathbb{Z}\setminus\{2,-2,1\}$

Veamos el m tal que $\lim\limits_{z\to n} (z-n)^m f(z)\ \exists$ (y si $m>0$ entonces pedimos que sea $\neq 0$)

$$\lim_{z\to n} (z-n)^m \frac{(z-2)(z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = (n-2)(n+2)(n-1)^4 \cdot \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^m}{(\sin \pi z)^4}$$

del límite visto antes, si $m=4 \Rightarrow \lim\limits_{z\to n} \dfrac{(z-n)^4}{(\sin \pi z)^4} = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(-1)^4} = \dfrac{1}{\pi} \neq 0$

$$m<4 \Rightarrow \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^m}{(\sin \pi z)^4}\ \nexists$$

$$m>4 \Rightarrow \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^m}{(\sin \pi z)^4} = \underbrace{\lim_{z\to n} \frac{(z-n)^4}{(\sin \pi z)^4}}_{1/\pi} \cdot \lim (z-n)^{\overbrace{m-4}^{>0}} = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0$$

$\therefore$ Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{2,-2,1\} \Rightarrow n$ es polo de orden 4.

<u>Caso 2</u>: Si $n \in \{2,-2\}$ (Veamos spg el caso $n=2$)

buscamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{z \to 2} (z-2)^m \cdot \frac{(z-2)(z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}$ $\exists$ (y si $m>0$ $\Rightarrow$ ~~el~~ quiero que el lim sea $\neq 0$)

$$= \lim_{z \to 2} \frac{(z-2)^{m+1} \cdot (z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = 4 \cdot 3^4 \cdot \lim_{z \to 2} \frac{(z-2)^{m+1}}{(\sin \pi z)^4}.$$

La existencia de este último límite, se verifica igual que antes, en este caso se tiene que $m = 3$

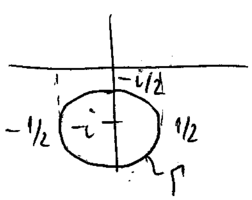
$\therefore$ 2 y -2 son polos de orden 3.

- Finalmente, el caso $n=1$. Basta ver que:

$$\lim_{z \to 1} (z-2)(z+2) \frac{(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = (-1)(3) \lim_{z \to 1} \underbrace{\frac{(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}}_{\frac{1}{\pi}(-1)} \neq 0 \text{ y existe!}$$

$\therefore$ $n=1$ es singularidad evitable / removible

$\therefore$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{2,-2,1\}$ Polo de orden 4, $n=1$: ~~polo~~ sing. evitable
$n \in \{2,-2\}$ polo orden 3.

b) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$ región 

Veamos los polos de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ como e^{iz} no se anula los polos son los ptos donde $z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z_1 = i$ $z_2 = -i$ solo este importa

- Notar que por fact. del pol. son de orden 2

en efecto: $\displaystyle\lim_{z \to -i} \cancel{(z+i)^2} \frac{e^{iz}}{\cancel{(z+i)^2}(z-i)^2} = \frac{e^{i(-i)}}{(-i-i)^2} = \frac{e^1}{4i^2} = -\frac{e^1}{4} \neq 0$ ✓

Por el Teo. de los residuos

$$\oint_{|z+i|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}, -i\right)$$

(el otro polo <u>no</u> va pues no está encerrado por Γ)

Para calcular el polo recordemos la fórmula general para un polo p de orden m

$$\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to p} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-p)^m f(z)\right)$$

En nuestro caso $p=-i$, $m=2$

$$\therefore \operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left((z+i)^2 \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right) = \lim_{z\to -i} \frac{ie^{iz}(z-i)^2 - 2(z-i)e^{iz}}{(z-i)^4}$$

$$= \frac{ie^{i(-i)}(-i-i)^2 + 2\cdot 2i\, e^{i(-i)}}{(-i-i)^4} = \frac{e^1\cdot i(-2i)^2 + 4ie^1}{(-2i)^4}$$

$$= \frac{e^1\cdot i\cdot -4 + 4ie^1}{(-2i)^4} = \frac{0}{(-2i)^4} = 0.$$

Obs. ¡Cuando el polo es de orden >1 puede dar residuo $=0$! Cuando es de orden 1 NUNCA da 0 (pues el res se calcula con el cálculo del orden donde pedimos que sea $\neq 0$)

$$\therefore \oint_{|z+i|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$$

$\square$

P2 a) hay que agregar como hipótesis que $f \in H(\mathbb{C})$.

Debemos probar que $\exists k \in \mathbb{N} \wedge a, b \in \mathbb{R}$ tq $|f(z)| \leq a + b|z|^k \Leftrightarrow f$ es polin. de grado k.

($\Leftarrow$) Es directo.

Si f es pol. de grado $k \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$

Luego basta escoger a suf. grande y b suf. grande para tener la desigualdad

($\Rightarrow$) Esto es más delicado. Solo sabemos que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$.

Como $f \in H(\mathbb{C})$ $\forall p \in \mathbb{C}$ f se puede escribir en serie de potencias

ie. $f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - p)^n$ con $a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$

$\therefore$ basta ver que $\forall p \in \mathbb{C}$: $a_n = 0$ si $n \geq k+1$

o equivalentemente (por la fórmula de a_n) que $f^{(n)}(p) = 0$ $\forall n \geq k+1$.

En efecto : Por las desig de Cauchy

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M_r \quad \forall r \quad \text{con } M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)| \overset{\text{Hipot.}}{\leq} a + |z|^k \quad (z \in \partial D(p,r)) = a + r^k$$

$$\leq \frac{n!(a + br^k)}{r^n} \qquad n \geq k+1$$

$$= n! \frac{a}{r^n} + \frac{b}{\underbrace{r^{n-k}}_{\geq 1}} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0.$$

$\therefore f^{(n)}(p) = 0 \ \forall n \geq k+1, \forall p \in \mathbb{C}. \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq k+1$

$\therefore f$ es polinomio de grado k

$\square$

Veamos las consecuencias de Liouville:

b) Si $f \in H(\mathbb{C})$ no es constante, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Recuerdo: A es denso en $\mathbb{C}$ si $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists a \in A$ tq $\forall \varepsilon > 0\ |z-a| < \varepsilon$.
(o sea, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene "cerca" un punto de A)

Ejemplo típico: En $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ es denso.

Probemos lo pedido por contradicción. Sea $f \in H(\mathbb{C})$ no constante.

Supongamos que $f(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{C}$, ie. $\exists \hat{z} \in \mathbb{C}$ tq $\forall z \in \mathbb{C}\ |f(z) - \hat{z}| > \varepsilon$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} > \dfrac{1}{|f(z) - \hat{z}|}\ \forall z \in \mathbb{C}$ si consideramos la función $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - \hat{z}}$ esta cumple:

- $g \in H(\mathbb{C})$ pues $f \in H(\mathbb{C})$ y no se anula ($f(z) \neq \hat{z}\ \forall z$!)
- $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z) - \hat{z}|} < \dfrac{1}{\varepsilon}$ ie. es acotada

Por Liouville: $g(z) \equiv cte. = \dfrac{1}{f(z) - \hat{z}} \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{cte.} + \hat{z} \leftarrow$ constante! $\hat{z}$ es fijo!

$\rightarrow\!\leftarrow$ pues f no era constante

$\therefore f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

c) $f, g \in H(\mathbb{C})$ tq $\forall z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} f \leq k \cdot \operatorname{Re} g$ k cte. indep. de z. (notar que $k \in \mathbb{R}$ pues $\operatorname{Re}(\cdot): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$)

Veamos que $\exists a, b$ tq $f(z) = a g(z) + b$.

En efecto. notemos que la función $f - kg = h$

cumple: $\operatorname{Re}(f - kg) = \operatorname{Re} f - k \operatorname{Re} g \leq 0$ (*)

así, necesitamos una función holomorfa tal que su módulo SOLO dependa de su parte real. Dicha función es por ejemplo la exponencial compleja

ie. Tomemos $H = e^h = e^{f-kg} \Rightarrow |H| = |e^{f-kg}| = e^{\operatorname{Re}(f-kg)} = e^{\operatorname{Re} f - k \operatorname{Re} g} \underset{(*)}{\leq} e^0 = 1$

$\uparrow$ holomorfa pues f y g lo son

$\therefore$ Por Liouville $H = e^h = Cte \Rightarrow h = \ln(cte) = f - kg$

$\Rightarrow f = kg + \ln(cte) = ag + b$ $\square$

Aux 10.

a) Pdq $\forall\, n > k \geq 1$, $n, k \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\, dz$

$\Gamma \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ camino cerrado simple que encierra al origen, recorrido en sentido antihorario.

Sol. La función $f_n(z) = \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}$ tiene a 0 como polo de orden $(k+1)$

En efecto: $\lim_{z\to 0} \cancel{z^{k+1}} \frac{(z+1)^n}{\cancel{z^{k+1}}} = 1^n = 1 \neq 0$ y $\lim_{z\to 0} z^\alpha \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} \nexists$ si $\alpha < k+1$.

pues: $\lim_{z\to 0} \frac{(z+1)^n}{\underbrace{z^{k+1-\alpha}}_{>0 \text{ pues } \alpha < k+1}}$ es del tipo $\frac{cte}{0}$

$\Rightarrow$ el lim $\nexists$ si $\alpha < k+1$.

$\therefore$ 0 es polo de orden $k+1$.

$\Rightarrow \Gamma$ encierra a 0

$\Rightarrow$ Por Teo residuos: $\oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$

Calculemos el Residuo (orden $(k+1)$)

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{((k+1)-1)!} \frac{d^{(k+1)-1}}{dz^{(k+1)-1}} \left(\cancel{z^{k+1}} \cdot \frac{(z+1)^n}{\cancel{z^{k+1}}} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} ((z+1)^n)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z+1)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{1} = \frac{1}{k!} \overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}^{n!} \Big/ (n-k)!$$

ni quita ni pone

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\therefore \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\, dz = \frac{1}{\cancel{2\pi i}} \left(\cancel{2\pi i} \binom{n}{k} \right) = \binom{n}{k}$ que era lo deseado (Por fórmula de Cauchy queda propuesto)

b) Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$.

Sol. Gracias a (a) $\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} dz$ con Γ curva simple cerrada que encierra al orig.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^{2n}}{\underset{\substack{\uparrow \\ z^n \cdot z}}{z^{n+1}}} dz \right) \frac{1}{5^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{meto } 5^n \\ \text{a la integral}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^{2n}}{(5z)^n} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n \frac{dz}{z}$$

nos gustaría poder cambiar el orden de la integral con la serie, pues tendríamos una suma geométrica! (y así desaparecería!), pero hay que tener cuidado al hacer eso, pues es válido solo para algunos caminos Γ, sin este cuidado podríamos tomar $\Gamma = \{|z| = R\}$ con R suf. grande y concluir que la serie vale ∞, lo cual no es cierto!)

Para esto, notemos que: En caso de ser válido:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n}_{\substack{\| \\ \sum_{n=0}^{\infty} r^k}} \Bigg) \frac{dz}{z}$$

queremos que

$\sum_{n=0}^{\infty} r^k$ converge si $|r| < 1 \Rightarrow \left| \frac{(z+1)^2}{5z} \right| < 1$.

Entonces, sea $\Gamma = D(0,1)$, en este caso: $|z| < 1. \Rightarrow \left| \frac{(z+1)^2}{5z} \right| < \left| \frac{(|z|+1)^2}{5|z|} \right| = \frac{(1+1)^2}{5} = \frac{4}{5} < 1$

luego en $\Gamma = D(0,1)$ la serie converge uniformemente! (pues estamos dentro del disco de convergencia)

$\Rightarrow$ se puede cambiar suma con integral!

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{2\pi i} \oint \ldots = \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(0,1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n \right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{(z+1)^2}{5z}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\frac{5z - (z^2+2z+1)}{5\cancel{z}}} \frac{dz}{\cancel{z}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{5}{5z - z^2 - 2z - 1}\, dz = \frac{-5}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$$ esta última integral la calculamos por residuos.

Polos? $z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

pero $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow$ queda fuera de $|z| = 1$.

$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow$ queda dentro de $|z| = 1$

Claramente los polos son de orden 1 (pues son las 2 raíces de un pol de grado 2)

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\operatorname{Res}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{z^2 - 3z + 1}}_{f}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\Bigg) = \lim_{z \to \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cancel{\left(z - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{\left(z - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}\left(z - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$$

$$= \lim_{z \to \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{\left(z - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{\cancel{3} - \sqrt{5} - \cancel{3} - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

finalmente: $$\frac{-5}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1} = \frac{+5}{\cancel{2\pi i}} \cdot \cancel{2\pi i} \cdot + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

es decir: $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$ que era lo deseado ∎

P4) a) $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hol. no nula. $p \in \mathbb{C}$ raíz: $f(p) = 0$.

Pdq. $\exists$ ctes. $r>0$, $m \geq 1$ y $Q(z) \in H(D(p,r))$, $Q(p) \neq 0$ tq:

$$\forall z \in D(p,r) \quad f(z) = (z-p)^m Q(z).$$

Deducir que p es polo simple de $\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z)$ y $Res(g,p) = m$.

Sol. (Notar que como f es hol. no nula $\Rightarrow \exists r>0$ tq en $D(p,r) \setminus \{p\}$ $f(z) \neq 0$. (o sea sus ceros son aislados)
(En clase discutimos el porque))

Como f es hol. en $p \Rightarrow \exists r>0$ tq $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$

Sea $m = \min \{n / a_n \neq 0\}$ ($< \infty$ pues f no es nula)

además, como $f(p) = a_0 = 0 \Rightarrow m \geq 1$.

Luego $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-p)^n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+m} (z-p)^{j+m} = (z-p)^m \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+m} (z-p)^j}_{Q(z)}$

Notando que Q se escribe como serie de pot en $D(p,r)$
se concluye que es holomorfa, más aun: $Q(p) = a_m \neq 0$. (Por def f!)

$\therefore f(z) = (z-p)^m Q(z)$, Q hol tq $Q(p) \neq 0$.

Notemos que dado que como en $D(p,r) \setminus \{p\}$ $f(z) \neq 0$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ es meromorfa.}$$

Por otro lado $f'(z) = m(z-p)^{m-1} Q(z) + (z-p)^m Q'(z)$

Luego: $g(z) = \dfrac{m(z-p)^{m-1} Q(z) + (z-p)^m Q'(z)}{(z-p)^m Q(z)} = \dfrac{m}{(z-p)} + \dfrac{Q'(z)}{Q(z)}$

Luego, $z = p$ es polo de g

Veamos que es simple:

$$\lim_{z\to p} (z-p)\, g(z) = \lim_{z\to p} (z-p)\left(\frac{m}{z-p} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} \right)$$

$$= \lim_{z\to p} m + (z-p)\frac{Q'(z)}{Q(z)} = m.$$

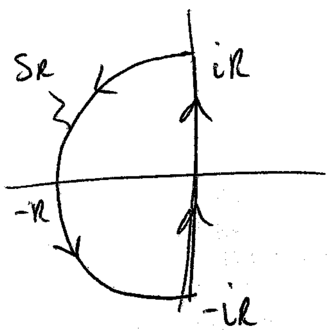
no se anula en p

$$\underbrace{\phantom{(z-p)\frac{Q'(z)}{Q(z)}}}_{\lim_{z\to p} (z-p)\frac{Q'(z)}{Q(z)} = 0.}$$

$\therefore$ $z = p$ es polo simple de g y $\operatorname{Res}(g, p) = m$. $\square$

b) Esto es la generalización de la P3 del control 2.

Consideremos el camino $\Gamma_R = S_R \cup i[-R,R]$ (el mismo del control!)



Notar que, la parte anterior nos dice lo siguiente: si λ es raíz de $P(z)$ con multiplicidad m (osea, al factorizar me queda el término $(z-\lambda)^m$), entonces λ es polo de $\frac{P'(z)}{P(z)}$ y $\operatorname{Res}\left(\frac{P'}{P}, \lambda\right) = m$.

Así pues, la función $g(z) = \frac{P'(z)}{P(z)}$ posee tantos polos como raíces posee P, todos ellos simples, por lo tanto, ~~siendo~~ g es meromorfa en $\mathbb{C}$ y por Teo. de los residuos, si R es suf. grande:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\lambda \text{ raíz de } P \\ \operatorname{Re}\lambda < 0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P'}{P}, \lambda\right) \overset{a)}{=} 2\pi i \cdot \#\text{ Total de raíces estables.}$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz + \int_{i[-R,R]} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

Obs. El número de raíces incluye la multip. pues por a) el residuo es EXACTAMENTE la multiplicidad de la raíz.

Recordemos, por un lado que la aplicación $f\cdot g \longmapsto (f\cdot g)'$ lleva productos en sumas y por lo tanto (Ver Aux 9)

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\lambda_i} \qquad (gr(p)=n) \quad \text{con } \lambda_i \text{ las raíces de } p.$$

$$\therefore \int_{S_R} \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_R} \frac{1}{z-\lambda_i}dz$$

y por otro lado: $\displaystyle\int_{i[-R,R]} \frac{p'(z)}{p(z)}dz \underset{\substack{\gamma(y)=iy \quad y\in[-R,R] \\ \gamma'(y)=i}}{\overset{\uparrow}{=}} i\int_{-R}^{R} \frac{p'(iy)}{p(iy)}dy$

Así, tomando límite con $R\to\infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{p'(z)}{p(z)}dz + \lim_{R\to\infty} i\int_{-R}^{R} \frac{p'(iy)}{p(iy)}dy = 2\pi i \cdot \#\text{ raíces est. de } p$$

$$\Leftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_R} \frac{1}{z-\lambda_i}dz + \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p'(iy)}{p(iy)}dy = \#\text{ raíces est. de } p.$$

Por lo tanto, si probamos que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{z-\lambda_i}dz = i\pi$, estamos listos.

En efecto, eso fue probado en la Pauta del control 2! (de hecho ahí puse que vale $i\pi$ independiente del valor de λ_i!!)

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_R} \frac{dz}{z-\lambda_i} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{i=1}^{n} i\pi = \frac{n i\pi}{2\pi i} = \frac{n}{2}$$

y se concluye: $\displaystyle\frac{n}{2} + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{p'(iy)}{p(iy)}dy = \#\text{ raíces est. de } p.$ $\square$