Pauta Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**

Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 2.

(a) (4 puntos) Encuentre los discos de convergencia de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\ln(n))^n(z+1)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{(\ln(n))^2}z^n$

(b) (2 puntos) Sea $f(z)=\frac{z}{z+1}$, encuentre la expansión en serie de $f(z)$ en torno al punto $z_0=0$ y calcule su radio de convergencia.

Solución:

(a)(i) Antes de intentar calcular el radio de convergencia es necesario escribir la serie de la forma:

$$\sum_{n\geq 0}a_n(z+1)^n$$

de donde se desprende que $a_0=a_1=0$ y en general:

$$a_n=\begin{cases}(\ln\sqrt{n})^{\sqrt{n}} & \text{si } n=k^2, k\in\mathbb{N}, k>1\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

naturalmente, debido a como está definido a_n, no es posible usar el criterio del cuociente, por lo que se debe acudir al criterio de la raíz n-ésima para determinar el radio de convergencia, primero notemos que:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}\sqrt[n]{(\ln\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}=(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}} & \text{si } n=k^2, k\in\mathbb{N}, k>1\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

de donde se concluye que:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Para calcular este límite, aprovechemos que la función logaritmo es continua e inyectiva en $\mathbb{R}^+$, pues en tal caso:

$$\lim_n\ln((\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}})=\ln(\lim_n(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}})$$

y gracias a la inyectividad podremos conocer el valor del límite sin ambiguedad. Se tiene entonces:

$$\lim_n\ln((\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}})=\lim_n\frac{\ln(\ln\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=\lim_k\frac{\ln(\ln k)}{k}$$

y este último límite se puede calcular con la regla de L'Hopital (es de la forma ∞/∞) como:

$$\lim_k\frac{\ln(\ln k)}{k}=\lim_k\frac{\frac{1}{\ln k}\cdot\frac{1}{k}}{1}=\lim_k\frac{1}{k\ln k}=0$$

lo que, por inyectividad del logaritmo implica que:

$$\lim_{n\to\infty}(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

luego el radio de convergencia $R = 1/1 = 1$ y por lo tanto el disco de convergencia es:

$$D = D(-1,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| < 1\}$$

(a)(ii) En este caso es directo que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{(\ln(n))^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}$$

Al igual que en el caso anterior, utilizaremos la función logaritmo para simplificar el cálculo del límite, notar que:

$$\ln(n^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}) = \frac{(\ln(n))^2}{n} \cdot \ln(n) = \frac{(\ln(n))^3}{n}$$

y para calcular el límite de esta última expresión, basta aplicar la regla de L'Hopital repetidas veces:

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{(\ln(n))^3}{n} &= \lim_n \frac{3 \cdot (\ln(n))^2 \cdot 1/n}{1} = \lim_n \frac{3 \cdot (\ln(n))^2}{n} = \lim_n \frac{6 \cdot (\ln(n)) \cdot 1/n}{1} \\ &= \lim_n \frac{6 \cdot (\ln(n))}{n} = \lim_n \frac{6 \cdot 1/n}{1} = \lim_n \frac{6}{n} = 0\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

por lo que $R = 1/1 = 1$, de donde se concluye que el disco de convergencia es:

$$D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

(b) Para este problema basta reconocer una suma geométrica (que será válida si $|-z| < 1$):

$$\frac{z}{z+1} = z \cdot \frac{1}{z+1} = z \cdot \frac{1}{1-(-z)} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n$$

así, hemos encontrado la serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$. Para el radio de convergencia basta ver que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

de donde se concluye que $R = 1$.

Asignación de Puntajes: Para cada serie de **(a)** los 2 puntos se reparten:
0.5 puntos Explicitar cual es el límite (o lím sup) que se debe calcular
1.0 puntos por el cálculo
0.5 puntos por explicitar el disco de convergencia (Radio y centro)

Para **(b)**:
1.0 puntos por formar la serie, haciendo aparecer la suma de una serie geométrica (si se equivocan con el signo, es decir, ponen z^n en lugar de $(-z)^n$, solo 0.5 puntos).
1.0 puntos por radio de convergencia. Pueden calcularlo con la fórmula, o bien indicar que para la serie geométrica el radio es 1.