P1 a) $\displaystyle\oint_{\partial D(0,3)} \overbrace{\frac{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}}^{F(z)}\,dz.$ $\partial D(0,3)$ recorrido en forma antihoraria.

Recordemos que si $f\in H(\Omega)$ y $D(p,R)\subset\Omega$, entonces la fórmula de Cauchy dice que: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,R)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad \forall z_0\in D(p,R)$

en nuestro caso no es directamente aplicable pues si defino f tal que

$$\frac{f(z)}{z-1}=F(z) \quad \text{ó} \quad \frac{f(z)}{z-2}=F(z)$$ la f no resulta holomorfa en Ω

La idea es reescribir F de modo tal que podamos aplicar la fórmula.

Así, notemos que si: $\displaystyle\frac{a}{(z-1)(z-2)}=\frac{b}{z-1}+\frac{c}{z-2}=\frac{b(z-2)+c(z-1)}{(z-1)(z-2)}$

$$=\frac{z(b+c)-2b-c}{(z-1)(z-2)}$$

Luego: $b+c=0 \wedge -2b-c=a$

$\Rightarrow \boxed{b=-a \mid c=a}$

$\therefore \forall a: \displaystyle\frac{a}{(z-1)(z+1)}=\frac{a}{z-2}-\frac{a}{z-1}.$

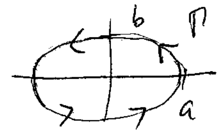
$$\therefore \oint_{\partial D(0,3)}\frac{\overbrace{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}^{a}}{(z-1)(z-2)}dz=\oint_{\partial D(0,3)}\frac{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}dz-\oint_{\partial D(0,3)}\frac{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}dz$$

Así, podemos tomar $f(z)=\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)\in H(\mathbb{C})$! $\Rightarrow$ vale la fórmula int. de Cauchy.

$$\Rightarrow \oint_{\partial D(0,3)}\frac{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz=\oint_{\partial D(0,3)}\frac{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}dz-\oint_{\partial D(0,3)}\frac{\text{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}dz$$

$$\underset{(2\in D(0,3)\text{ y }1\in D(0,3))}{=}2\pi i\,(f(2)-f(1))=2\pi i\,(1-(-1))=4\pi i.$$ //

b) Pdq: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{ab}$ $\quad a, b > 0$.



Sol. Como dice el Hint. consid: $f(z) = \frac{1}{z}$ y

Paramet: $\gamma(t) = a\cos t + ib\,\text{sen}\,t \quad t \in [0, 2\pi]$.

$\Rightarrow \gamma'(t) = -a\sin t + ib\cos t$.

Así: Por def: $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos t + i\,\text{sen}\,t} \cdot (-a\,\text{sen}\,t + ib\cos t)\,dt$

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} \frac{(-a\,\text{sen}\,t + ib\cos t)}{(a\cos t + bi\,\text{sen}\,t)} \cdot \frac{\overline{(a\cos t + i\,\text{sen}\,t)}}{\overline{(a\cos t + i\,\text{sen}\,t)}}\,dt$ $\qquad \overline{(a\cos t + ib\,\text{sen}\,t)} = a\cos t - ib\,\text{sen}\,t$.

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} \frac{-a^2\cos t\sin t + \overbrace{iab\,\text{sen}^2 t + iab\cos^2 t}^{iab} + b^2\cos t\sin t}{|a\cos t + ib\,\text{sen}\,t|^2}\,dt$

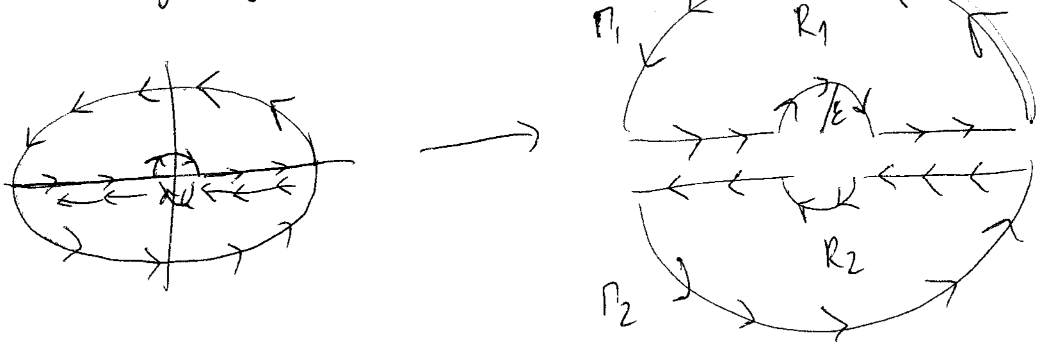
$\displaystyle = \underbrace{(b^2 - a^2)\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\,\text{sen}^2 t}\,dt}_{\text{Término extra.}} + i\,ab\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\,\text{sen}^2 t}}_{\text{lo que buscamos!}}$

Para concluir necesitamos obtener de otra forma el valor de la integral (~~[illegible]~~ notemos que no podemos aplicar Cauchy - Goursat directamente: $f \notin H$(Reg. encerrada por Γ)) ni tampoco la fórmula integral de Cauchy (pues integramos una elipse).

Una técnica útil es juntar ambos Teos. de forma de poder calcular la integral:

- Para poder usar C-G hay que ~~encerrar~~ integrar en una región que NO incluya al origen

Por ej:



En $\Gamma_1 = E_+ \cup L_1 \cup C_\varepsilon^+ \cup L_2$ En $\Gamma_2 = E_- \cup L_2^- \cup C_\varepsilon^- \cup L_1^-$, $\boxed{C_\varepsilon : \text{círculo radio } \varepsilon}$

$L_1 : a \longrightarrow -\varepsilon$ $\quad L_2 : \varepsilon \longrightarrow a$ y con $^-$ al recorrer en el sent opuesto.

notar que Γ_1 encierra a R_1 tq $0 \notin R_1 \Rightarrow$ Vale C-G:

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = 0 = \int_{E^+} \frac{1}{z}\,dz + \int_{L_1} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_\varepsilon^+} \frac{1}{z}\,dz + \int_{L_2} \frac{1}{z}\,dz$$

Análogamente: $$\oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = 0 = \int_{E^-} \frac{1}{z}\,dz + \int_{L_1^-} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_\varepsilon^-} \frac{1}{z}\,dz + \int_{L_2^-} \frac{1}{z}\,dz$$

$$\therefore \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z}\,dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = 0 = \int_{E^+ \cup E^-} \frac{1}{z}\,dz + \overset{0}{\cancel{\int_{L_1} + \int_{L_1^-}}} + \overset{0}{\cancel{\int_{L_2} + \int_{L_2^-}}} + \int_{C_\varepsilon^+} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_\varepsilon^-} \frac{1}{z}\,dz$$

notar que $\displaystyle\int_{C_\varepsilon^+} + \int_{C_\varepsilon^-} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz$ pero recorrida ANTIHORARIO notación.

$$= -\oint_{C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz \quad \underline{\text{horario}}$$

$$\therefore 0 = \oint_{\text{Elipse}} \frac{1}{z}\,dz - \oint_{C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz \Rightarrow \oint_{\text{Elipse}} \frac{1}{z}\,dz = \boxed{\oint_{C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz} = 2\pi i \cdot \underbrace{f(0)}_{1} = 2\pi i$$

Fórmula integral de Cauchy con $f(z) = 1$ ($\in H(\mathbb{C})$!), $z_0 = 0 \in C_\varepsilon$

$$\therefore \oint_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz \overset{\text{lo de ahora}}{=} 2\pi i \overset{\text{lo de antes}}{=} (b^2 - a^2)\int_0^{2\pi} \underline{\qquad} + iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

igualando partes imag. se concluye. ∎

Obs. Esto es MUCHO más fácil con Teo. Residuos, pero aun no lo vemos.

P2) Probemos la desigualdad: La desig Δ dice que: $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

notemos que: $|z_1| = |z_1+z_2+(-z_2)| \leq |z_1+z_2| + \underbrace{|-z_2|}_{= |z_2|}$

$\Rightarrow |z_1|-|z_2| \leq |z_1+z_2|$

Análogamente: $|z_2|-|z_1| \leq |z_1+z_2|$

$\Rightarrow ||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2|$ lo deseado.

Probemos ahora que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial D(0,R)} \frac{z}{z^3+1} dz = 0.$$

Notar que de lo anterior:

$$||z^3|-1| \leq |z^3+1| \Rightarrow \frac{|z|}{|z^3+1|} \leq \frac{|z|}{|z|^3-1}.$$

En efecto:

$$\left|\int_{\partial D(0,R)} \frac{z}{z^3+1} dz\right| \leq \left|\int_{\partial D(0,R)} \left|\frac{z}{z^3+1}\right| dz\right|$$

$\gamma(t) = Re^{it}$, $\gamma'(t) = iRe^{it}$

$$\leq \left|\int_{\partial D(0,R)} \frac{|z|}{|z^3|-1} dz\right| \overset{\downarrow}{=} \left|\int_0^{2\pi} \frac{|Re^{it}|\cdot iRe^{it} dt}{|R^3e^{i3t}|-1}\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{R\cdot|iRe^{it}|}{R^3-1} dt = \int_0^{2\pi} \frac{R\cdot R\cdot 1}{R^3-1} dt = \frac{R^2}{R^3-1}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi \frac{R^2}{R^3-1}$$

pero $\lim_{R\to\infty} 2\pi \frac{R^2}{R^3-1} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\partial D(0,R)} \frac{z}{z^3+1} dz = 0.$

Como era deseado.

P3) $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \qquad q(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j} z^j$

a) r raíz de $p \Leftrightarrow p(r) = 0 = \sum_{j=0}^{n} a_j r^j$

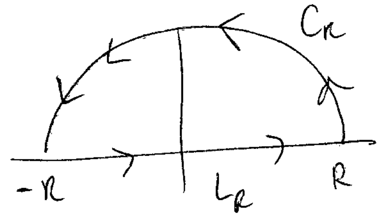
Calculemos $q(\overline{r}) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\, \overline{r}^j = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\, \overline{(r^j)} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j r^j} = \overline{p(r)} = 0 \Leftrightarrow \overline{r}$ raíz de q.

Luego, si p no posee raíces $\Rightarrow$ q tampoco.

Así pues, si suponemos que p no posee raíces $\Rightarrow$ $f(z) = \dfrac{1}{p(z)q(z)}$

es holomorfa pues los polin. son holomorfos y por hipot no se anulan.

b) Integremos en la región Γ_R $\qquad \Gamma_R = L_R \cup C_R$



Como $f \in H(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0 \quad \forall R>0.$$

$$\int_{L_R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 0 \quad \forall R.$$

Pero $\gamma(t) = t$, $t \in [-R, R]$, $\gamma'(t) = 1$

$$\int_{L_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)\cdot 1 dt = \int_{-R}^{R} \frac{1}{p(t)q(t)}dt = \int_{-R}^{R} \frac{1}{|p(t)|^2}dt$$

pero $p(t)q(t) = p(t)\overline{p(t)} = |p(t)|^2$

$t \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{t} = t$

$$\text{Así, } \forall R>0: \int_{-R}^{R} \frac{1}{|p(t)|^2}dt + \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

Luego, si probamos que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$, tendríamos $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{|p(t)|^2}dt = 0$

Lo que es una contradicción pues $\dfrac{1}{|p(t)|^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Necesariamente p posee una raíz $r \in \mathbb{C}$, y se concluye.

Así pues, basta probar que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{p(z)q(z)}dz = 0$, que es lo pendiente.

Veamos que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{p(z)q(z)}\,dz = 0$.

En efecto: $\left| \int_{C_R} \frac{1}{p(z)q(z)}\,dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R}{|p(Re^{it})\,q(Re^{it})|}\,dt \qquad \forall R>0$

Param $\gamma(t) = Re^{it}$, $\gamma'(t) = iRe^{it}$.

notar que como p y q son polin. de grado $n \Rightarrow p(z)q(z) = \sum_{j=0}^{2n} c_j \cdot z^j$

(no necesitamos explicitar los coef.)

así: $|p(Re^{it})\,q(Re^{it})| = \left| \sum_{j=0}^{2n} c_j R^j e^{ijt} \right| = R^{2n} \left| \sum_{j=0}^{2n} c_j/_{R^{2n-j}}\, e^{ijt} \right|$

pero $\lim_{R\to\infty} \left| \sum_{j=0}^{2n} \frac{c_j e^{ijt}}{R^{2n-j}} \right| = |c_{2n}|$ (único término con potencia 0 en R)

$\therefore$ Por def de límite: $\exists \tilde{R}$ suf. grande tq $\left| \sum_{j=0}^{2n} c_j e^{ijt}/_{\tilde{R}^{2n-j}} \right| \geq \frac{1}{2}|c_{2n}|$

Luego $\forall R > \tilde{R}$: $\left| \int_{C_R} \frac{1}{p(z)q(z)}\,dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R}{\frac{1}{2}|c_{2n}|R^{2n}}\,dt = R^{1-2n} \cdot \frac{4\pi}{|c_{2n}|}$

Como $n \geq 1 \Rightarrow 1-2n > 0$

$\Rightarrow \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Es decir: $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{p(z)q(z)}\,dz = 0$ que era lo deseado.

$\square$

P4) a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^2} = z^2 \cdot \underbrace{\dfrac{1}{(1+z)^2}}_{\text{busquemos la serie de pot de esta función.}}$

La idea es notar que $\dfrac{1}{(1+z)^2} = -\underbrace{\left(\dfrac{1}{1+z}\right)'}_{\text{determinar esta serie es fácil!}}$

Luego, sabemos que en el Dom. de conv de la serie se puede derivar término a término, haremos eso y podremos concluir.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} \underset{\uparrow \text{ conocida}}{=} \sum_{n\geq 0} (-z)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+z}\right)' = \sum_{n\geq 1} n(-1)^n z^{n-1} \Rightarrow -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n\geq 1} n(-1)^n z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n(-1)^{n+1} z^{n-1}$$

$$\therefore f(z) = z^2 \cdot \frac{1}{(1+z)^2} = z^2 \sum_{n\geq 1} n(-1)^{n+1} z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \underbrace{n(-1)^{n+1}}_{a_n} z^{n+1}$$ es la serie buscada

Además: R se puede calcular con raíz n-ésima o cociente y satisf: $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ con $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|n(-1)^{n+1}|} = \sqrt[n]{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$\therefore R = \underline{1}$.

b) $f(z) = -\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-z^2)$ Notemos en este caso que $f'(z) = +\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot (+\cancel{2}z)$
$= \dfrac{z}{1-z^2}$.

$f'(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$ es fácil de expandir en serie de pot

→ idea: obtener serie de la derivada y luego probar de forma rigurosa la relacion entre f y "primitiva de la serie".

Como $f'(z) = \frac{z}{1-z^2} = z \sum_{n \geq 0} (z^2)^{n} = \sum_{n \geq 0} z^{2n+1}$.

Definamos $h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+2} z^{2n+2}$, en tal caso $h'(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2n+1}$

(y esto vale en el radio de converg)

$\therefore h'(z) = f'(z) \quad \forall z \in D(0, R)$ con R radio cv de serie de h.

$\Rightarrow f = h + cte$, pero $f(0) = -\frac{1}{2} \operatorname{Log}(1-0) = -\frac{1}{2} \operatorname{Log}(1) = 0$

y $h(0) = 0$ (ver serie)

$\Rightarrow 0 = 0 + cte \Rightarrow cte \equiv 0$.

$\therefore f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+2} z^{2n+2}$. Veamos el radio de conv.

notar que en este caso $a_0 = 0$, $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n+2]{\frac{1}{2n+2}} = 1$.

$\therefore R = 1$.