Auxiliar 9 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 17 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Determine el valor de la siguiente integral:

$$\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

donde el camino se recorre en forma antihoraria.

b) Demuestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta = \frac{2\pi}{ab}$ con $a, b > 0$

Indicación: Use $f(z) = \frac{1}{z}$ y el camino dado por la elipse centrada en el origen de semiejes a y b.

Pregunta 2. Pruebe, usando la desigualdad triangular de forma apropiada, que para todo par de números complejos z_1, z_2 se tiene que:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

Usando esto, acote apropiadamente para probar que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial D(0,R)} \frac{z}{z^3+1} dz = 0$$

Pregunta 3. El objetivo de este problema es dar una demostración alternativa al Teorema Fundamental del Álgebra, es decir, probaremos que: "Todo polinomio no constante, con coeficientes complejos posee al menos una raíz compleja". Para ello, siga los siguientes pasos:

a) Sean $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ y $q(z) = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n} z^n$ con $n \geq 1$. Pruebe entonces que $r \in \mathbb{C}$ es raíz de p sí y solo sí $\overline{r}$ es raíz de q. Concluya que si p no tiene raíces, entonces q tampoco las tiene. Y por lo tanto, si el polinomio $p(z)$ no posee raíces, entonces la función definida por $f(z) = \frac{1}{p(z)q(z)}$ es holomorfa.

b) Utilizando el teorema de Cauchy-Goursat en una semi-circunferencia llegue a una contradicción. Concluya.

Pregunta 4.

a) Determine la expresión en serie de potencia, en torno a $z_0 = 0$ para la función $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}$, determine además su radio de convergencia.

b) Determine la expresión en serie de potencia, en torno a $z_0 = 0$ para $f(z) = -\dfrac{1}{2}Log(1-z^2)$, determine además su radio de convergencia.