P1) Determinar dom. de converg. de:

a) $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{a_n} z^n$. Usemos el criterio del cuociente:

Es decir, cuando $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ está bien definido

entonces $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, calculemoslo:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{=e^{-1}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}}_{=1}$$

$$= e^{-1}$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{e^{-1}} = e \Rightarrow$ Dom conv: $D(0,e)$.

b) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{e^{in}} = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{e^{in}}}_{a_n} \cdot z^n$. Usemos el criterio de la raíz n-ésima

es decir $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, calculemos $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

[(Recuerdo: $\limsup_{n\to\infty} x_n$ = max valor de ptos de acumulación de la sucesión x_n
(osea, x_n no tiene por qué ser convergente, ej)
Ej simple: $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$. ($(-1)^n$ posee dos ptos. de acumul: 1 y −1))]

notemos que en este caso, la sucesión $x_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\underbrace{|e^{in}|}_{=1\ \forall n}} = \sqrt[n]{1} = 1\ \forall n$

osea $x_n = \sqrt[n]{|a_n|} = 1\ \forall n \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$

(pues si la suc. es convergente $\Rightarrow \exists$ un solo pto. de acumul.: el límite) luego $R = 1/1 \Rightarrow$ Dom. conv: $D(0,1)$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z-i)^{n!}$ Este problema parece sencillo pero tiene varios detalles:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z-i)^{n!}$ NO está escrito como serie de potencias (osea, de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$)

para calcular lo pedido primero DEBEMOS escribir esta serie como serie de Potencias.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z-i)^{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n \quad \text{con} \quad a_n = \begin{cases} k! & \text{si } n = k! \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Ahora que tenemos la expresión en serie de pot. podemos calcular el dom. de converg.

2) Para el cálculo del radio de conv NO se puede usar el crit. del cociente, pues la cantidad $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no queda bien definida $\Rightarrow$ Debemos usar raíz n-ésima

Es decir, calculemos: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, esto tiene varios detalles, estudiemos

la sucesión $x_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{|0|} & \text{si } n \text{ no es un factorial} \\ \sqrt[k!]{k!} & \text{si } n = k!,\ \text{algun } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \sim \\ \sqrt[k!]{k!} & \text{si } n = k!,\ \text{algún } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_n$ posee dos puntos de acum: 0 y $\underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{k!}}_{=1}$ (que puede ser ∞, por cierto, pero este NO es el caso)

$\left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{k!} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1\right)$

mayor pto acc.

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} x_n = 1.$$

$\therefore R = 1/1 = 1 \Rightarrow$ Dom conv: $D(i,1)$.

Obs. NO es lo mismo que $a_n = n!$ a que $a_n = \begin{cases} k! & \text{si } n = k! \text{ algun } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \sim \end{cases}$

Ojo!, en el primer caso $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$!!

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+2^n)}_{a_n} z^n$. Usemos el crit. del cuociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+2^{n+1}}{n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2^n} + \frac{n+2\cdot 2^n}{n+2^n} = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n+2^n}{n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n}{n+2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+2^n}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2^n}\right) + 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{2^n}+1}$$

$$= 0 + 1 + 1 = 2$$

$\therefore R = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Dom: $D(0, \frac{1}{2})$.

P2) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con $a_n = \begin{cases} 2 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases}$

Para el radio de cv. se debe usar raíz n-ésima: El crit del cuoc. queda mal definido $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases} \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \nexists \right)$

así pues, calculemos

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, pero $x_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2} & n \text{ par} \\ \sqrt[n]{1} & n \text{ impar} \end{cases}$

pero $\sqrt[n]{2} \to 1$ y $\sqrt[n]{1} \to 1$

así pues x_n converge a 1

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} x_n = 1. \Rightarrow R = 1$

Veamos ahora que si $|z| = 1$, entonces la serie diverge.

Tal como dice el hint: Veamos que la sucesión de sumas parciales NO es de Cauchy 4/7

Rcdo: $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ es suc. de Cauchy si $\forall \varepsilon>0 \; \exists \, l>0$ tq $\forall N, M > l : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Sea $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, con $|z| = 1$.

notar que $|S_N - S_{N+1}| = \left| \sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N+1} a_n z^n \right| = |-a_{N+1} z^{N+1}| = |a_{N+1}| \overbrace{|z^{N+1}|}^{1}$

$= |a_{N+1}| = \begin{cases} 2 & N \text{ impar} \\ 1 & N \text{ par} \end{cases}$

es decir $\forall N: |S_N - S_{N+1}| = \begin{cases} 2 & N \text{ impar} \\ 1 & N \text{ par} \end{cases}$

en particular, si $\varepsilon < 1$ $\forall l > 0 \; \exists N, M > l$ tq $|S_N - S_M| > \varepsilon$

(basta tomar $N = l+1$, $n = l+2$)

Luego (S_N) no es de Cauchy $\Rightarrow$ no es convergente $\Rightarrow$ $S = \lim S_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $|z|=1$ diverge.

Finalmente, sea $|z|<1$: $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge.

pero $S = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{\substack{n \text{ par} \\ n\geq 0}} a_n z^n + \sum_{n \text{ impar}} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} 2 \cdot z^{2n} + \sum_{n \geq 0} 1 \cdot z^{2n+1}$

$= 2 \sum_{n\geq 0} z^{2n} + \sum_{n\geq 0} z^{2n+1} = 2 \underbrace{\sum_{n\geq 0} (z^2)^n}_{\text{geom.}} + z \sum_{n\geq 0} (z^2)^n$

$= 2 \cdot \frac{1}{1-z^2} + \frac{z}{1-z^2}$

$= \frac{2+z}{1-z^2}$ como se deseaba.

P3| a) $T_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k$, $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} k z^k$

Probemos que $S_n(z) = \frac{T_n(z) - n z^{n+1}}{1-z}$

En efecto: Calculemos $(1-z)S_n(z) = (1-z)\sum_{k=0}^{n} k z^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} k z^k - \sum_{k=0}^{n} k z^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k z^k - \sum_{k=1}^{n} k z^{k+1} \leftarrow \text{sumo } 0 \text{ en } k=0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k z^k - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) z^j$$

$$= z + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1)) z^k - ((n+1)-1) z^{n+1}$$

$$= z + \sum_{k=2}^{n} z^k - n z^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z^k - n z^{n+1} = T_n(z) - n z^{n+1}$$

$\therefore$ $\boxed{S_n(z) = \dfrac{T_n(z) - n z^{n+1}}{1-z}}$

B) Radio conv. de S_n? $a_n = n \Rightarrow$ raíz n-ésima: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (conocido, o calculable vía $\lim \log(\sqrt[n]{n})$)

ahora: $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{T_n(z) - n z^{n+1}}{1-z}$ $(|z| < 1)$

Por un lado: $\lim_{n\to\infty} T_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} z + z^2 + \dots + z^n = \lim_{n\to\infty} z\underbrace{(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})}_{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}$

$$= \lim_{n\to\infty} z \cdot \frac{1-z^n}{1-z} \underset{\substack{z^n \to 0 \\ \text{si } |z|<1}}{=} \frac{z}{1-z}$$

Por otro lado: $\lim_{n\to\infty} n|z|^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{|z|^{n+1}}}$ Forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{d}{dn}\left(\left(\frac{1}{|z|}\right)^{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{-\overbrace{|z|^{n+1}}^{\to 0}}{\underbrace{\ln|z|}_{\text{def si } z\neq 0}} = 0$

si $z = 0$: $\lim n|z|^{n+1} = 0$ $\forall n$ de hecho

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n|z|^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n z^{n+1} = 0$$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \sum_{k\geq 0} k z^k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{T_n(z) - z^{n+1}\cdot n}{1-z} = \dfrac{\frac{z}{1-z} - 0}{1-z} = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. $\square$

b) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom. tq $f''(z) = 2f(z) + 1$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. 6/7

Encontremos la serie de pot. de f en torno a 0 y det. el radio de conv.

Como $f''(z) = 2f(z) + 1 \Rightarrow f'''(z) = 2f'(z) \Rightarrow f^{(4)}(z) = 2f^{(2)}(z)$

... en gral: Si $k \geq 3$: $f^{(k)}(z) = 2f^{(k-2)}(z)$

Como $f'(0) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$ impar.

además: $f''(0) = 2f(0) + 1 = 3 \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 3 \cdot 2^{k-1} \quad \forall k > 1$

$$\therefore \; S_f(z) = \sum_{k \geq 0} C_k z^k \text{ con } C_0 = f(0), \quad C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ \dfrac{3 \cdot 2^{\frac{k}{2}-1}}{k!} & k \text{ par} \end{cases}$$

$$= \sum_{k \text{ par}} \frac{3 \cdot 2^{\frac{k}{2}-1}}{k!} z^k + 1$$

$$= \sum_{k \geq 0} 3 \cdot \frac{2^{k-1}}{(2k)!} z^{2k} + 1$$

¿radio de conv? basta calcular $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[2k]{\frac{3 \cdot 2^{k-1}}{(2k)!}}$ (subsuc de pares) (la otra subsuc. es $\sqrt[2k+1]{0} = 0$) $= \dfrac{\lim \sqrt[2k]{3 \cdot 2^{k-1}}}{\lim \sqrt[2k]{(2k)!}}$ finito, $\to \infty$ $= 0$

$$\therefore \; R = \frac{1}{0} = +\infty.$$ (convención)

P4 $J_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!(n+k)!\, 2^{2n+k}}}_{a_{2n+k}} z^{2n+k}$

$$= \frac{z^k}{2^k} \sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!(n+k)!\, 2^{2n}}}_{a_{2n}} z^{2n}$$

Debemos probar que se tiene

$$z^2 J_k''(z) + z J_k'(z) + (z^2 - k^2) J_k(z) = 0.$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{\frac{\cancel{(-1)}\; 1}{2^{2n}(n!(n+k)!)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \sqrt[2n]{\frac{1}{n!(n+k)!}}$$ $\Vert$ 0

como $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$

$\therefore R = \infty \Rightarrow$ Puedo derivar las series término a término y el radio de conv. es ∞.

$$J_k'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (2n+k)}{n!(n+k)!\, 2^{2n+k}} z^{2n+k-1} = \sum_{n\geq 0} \tilde{a}_n (2n+k) z^{2n+k-1}$$

$$J_k''(z) = \sum_{n\geq 0} \tilde{a}_n (2n+k)(2n+k-1) z^{2n+k-2} \Rightarrow \begin{cases} zJ_k' = \sum_{n\geq 0} \tilde{a}_n (2n+k) z^{2n+k} \\ z^2 J_k'' = \sum_{n\geq 0} \tilde{a}_n (2n+k)(2n+k-1) z^{2n+k} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ el coef asociado a la serie $z^2 J_k'' + zJ_k' + (z^2-k^2)J_k$ es:

$$\tilde{a}_n (2n+k)(2n+k-1) + \tilde{a}_n (2n+k) + \tilde{a}_{n-1} - k^2 \tilde{a}_n$$

$$\left.\begin{aligned} &= (4kn+4n^2)\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-1} \\ &\text{pero: } \frac{\tilde{a}_{n-1}}{\tilde{a}_n} = -4n(n+k) \\ &\qquad (\text{verificar}) \quad (= -(4kn+4n^2)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow J_k'' \cdot z^2 + z J_k' + (z^2-k^2) J_k = 0.$$

<u>Obs</u>. $\tilde{a}_n$ es asociado a z^{2n+k}

$\Rightarrow \tilde{a}_{n-1}$ es asociado a $z^{2(n-1)+k}$ (por eso $z^2 J_k$ hace aparecer a $\tilde{a}_{n-1}$)

<u>y no a $\tilde{a}_{n-2}$</u>