Auxiliar 8 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 11 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca R.
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω un abierto no vacío. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, luego $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables.
Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y solo si:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}$$

Estas se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Use estas ecuaciones para mostrar que la función logaritmo definida como:

$$Log\ z = \log r + i\theta \quad \text{con } z = re^{i\theta} \text{ con } -\pi < \theta < \pi$$

Pregunta 2. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $p^\lambda : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ por:

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda Log(z)),\ z \neq 0$$

a) Verifique que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $p^k(z) = z^k$. Muestre que $\overline{p^\lambda(\overline{z})} = p^{\overline{\lambda}}(z)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.
b) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde p^λ es holomorfa y pruebe que $(p^\lambda)' = \lambda p^{\lambda-1}$.
c) Todo lo anterior justifica que la función p^λ se llame **función potencia generalizada** y que se denote simplemente por $p^\lambda(z) = z^\lambda$. Muestre que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ entonces:

$$t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha[\cos(\beta \log t) + i \sin(\beta \log t)]$$

Deduzca que:

$$i^i = e^{-\pi/2}$$

Pregunta 3.

a) Calcule $\int_\Gamma |z|\overline{z}dz$ donde Γ es la frontera de la región $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| \leq 1, Im\ z \geq 0\}$ donde la integral es recorrida en sentido antihorario.
b) Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario y que encierra una región $D \subset \mathbb{C}$. Pruebe que

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2i}\oint_\Gamma \overline{z}dz$$

Pregunta 4.

a) Pruebe que la asociación $f \mapsto \dfrac{f'}{f}$, donde f es una función holomorfa, envía productos en sumas.
b) Si $P(z) = (z - a_1)\cdots(z - a_n)$, con $a_i \in \mathbb{C}$, determine $\dfrac{P'}{P}$
c) Sea γ una curva cerrada tal que ninguna de las raíces de P está sobre γ. Pruebe que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} Ind(\gamma, a_i)$$

Pregunta 5. Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{e^{-b^2}\sqrt{\pi}}{2} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Para el caso $b \neq 0$ considere la función $f(z) = e^{-z^2}e^{2ibz}$ y la región rectangular de vértices: $-R, R, i\tau + R, i\tau - R$ con $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a ser fijado de forma conveniente.