Auxiliar 6 - CAA - Primavera 2012.

P1 a) $p(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \underset{\uparrow}{=} \frac{1-z^n}{1-z}$

suma geom

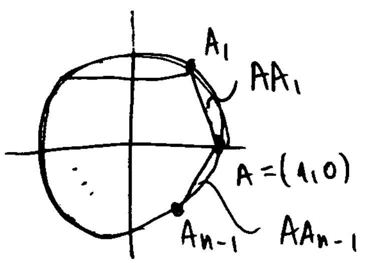
$\Leftrightarrow \left(p(z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z^n = 1}_{} \wedge z \neq 1 \right)$

raíces n-ésimas de la unid. $\neq 1$.

$\therefore$ raíces de p: $w_k = e^{\frac{i 2\pi i k}{n}}$ $k \in \{1, \dots, n-1\}$. ($k=0$ da $w_0 = 1$, que no queremos).

Como p es mónico $\Rightarrow p(z) = (z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_{n-1})$

b)



Recordemos que son precisamente las raíces n-ésimas de la unidad los vértices de este polígono

Queremos probar que $\prod_{i=1}^{n-1} AA_i = n$

notar que $AA_i = |1 - w_i| \Rightarrow \underline{\text{Pdq}}.$ $\prod_{i=1}^{n-1} |1 - w_i| = n$.

de la parte anterior, tenemos que:

$$p(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = (z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_{n-1}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Si evaluamos en $z = 1$: $p(1) = 1 + 1 + \dots + 1 = n = (1 - w_1)(1 - w_2) \dots (1 - w_{n-1})$

$\therefore$ $n = (1 - w_1)(1 - w_2) \dots (1 - w_{n-1})$ (luego, el producto sin módulo ya es real!)

$\Leftrightarrow n = \prod_{i=1}^{n-1} |1 - w_i|$ que era lo deseado.

P2 a) $f: D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa.

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ con $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$f(x+iy)$

$u = v^2$. Pdq f es constante en $D(0,1)$.

Sol. Como f es holomorfa $\Rightarrow$ satisface las cond de (CR) en $D(0,1)$.

es decir: $\partial_x u = \partial_y v \wedge \partial_y u = -\partial_x v$

además $u = v^2 \Rightarrow \partial_x u = 2v\partial_x v \quad \wedge \quad \underset{-\partial_x v}{\underset{\shortparallel}{\partial_y u}} = 2v\partial_y v \overset{(CR)}{=} 2v\partial_x u$

$$= 2v(2v\partial_x v)$$
$$= 4v^2\partial_x v$$

$\Rightarrow 0 = (4v^2+1)\partial_x v$

$\Rightarrow \partial_x v = 0 = -\partial_y u \Rightarrow \boxed{\partial_y u = 0 = \partial_x v}$

Análogamente: $\partial_x u = 2v\partial_x v = -2v\partial_y u = -4v^2\partial_y v = -4v^2\partial_x u$

$\Rightarrow (1+4v^2)\partial_x u = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_x u = 0 = \partial_y v}$

Conclusión: $\nabla u = \nabla v = \vec{0}$ en $D(0,1)$ que es convexo

$\Rightarrow u = cte_1$ en $D(0,1)$ y $v = cte_2$ en $D(0,1)$

$\Rightarrow f = cte_1 + i\,cte_2$ cte en $D(0,1)$. $\square$

b) $f = u + iv$ holomorfa en D abto y convexo.

$\exists\, a, b, c$ ctes tq $a^2+b^2 \neq 0$ y $au + bv = c$ en D

Pdq f cte en D.

Sol. Como f es hol en $D \Rightarrow$ valen las cond. de (CR) en D.

además, como $au + bv = c \Rightarrow$ $\begin{array}{l} a\partial_x u + b\partial_x v = 0 \\ a\partial_y u + b\partial_y v = 0 \end{array}$

dejemos todo en términos de derivadas de v, por (CR): $\partial_x u = \partial_y v$ y $\partial_y u = -\partial_x v$

$\Rightarrow$ $\begin{array}{l} a\partial_y v + b\partial_x v = 0 \\ -a\partial_x v + b\partial_y v = 0 \end{array}$ esto se puede escribir como un sistema de la forma $M \cdot \begin{bmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{bmatrix} = \vec{0}$

Con $M = \begin{bmatrix} b & a \\ -a & b \end{bmatrix}$, notar que si M es invert ($\Leftrightarrow \det M \neq 0$)

entonces $\nabla v \equiv \vec{0}$

Esto es cierto pues $\det M = a^2 + b^2 \neq 0$ por hipot $\Rightarrow \nabla v = \vec{0}$

$\Rightarrow \nabla u = \vec{0}$ (CR)

$\Rightarrow$ Como D abto conexo, entonces $u = cte_1$, $v = cte_2$

$\Rightarrow f = c_1 + i c_2$ cte. ✓

P3| a) f hol. $f = u + iv$, $u = x^2 - y^2 + 2x$ y $f(i) = 2i - 1$.

Por (CR): $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2 \qquad \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\underbrace{\Rightarrow v(x,y) = 2xy + 2y + C(x) + C \qquad \Rightarrow v(x,y) = 2xy + C(y) + C}$$

$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + 2y + C$, C cte en $\mathbb{R}$.

Para determinar C, basta usar la condición $f(i) = 2i - 1$:

$$f(i) = 2i - 1$$

$$\begin{aligned} f(0,1) &= u(0,1) + i v(0,1) = -1 + i(2 \cdot 1 + C) \\ &= -1 + 2i + iC = 2i - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 0}$$

Luego, se concluye que $f(x,y) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y)$

más aún: $f(x,y) = x^2 + (iy)^2 + 2ixy + 2(x + iy)$

$$= (x + iy)^2 + 2(x + iy)$$

$\Leftrightarrow f(z) = z^2 + 2z$. Que ciertamente es holomorfa :)

b) $z_0 \in \mathbb{C}$. $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$

Pdq f es dif en el sent. complejo solo en $z = z_0$.

Primero notemos que: $f(x,y) = (x + iy - x_0 - iy_0)|x - x_0 + i(y - y_0)|$

$$= (x - x_0 + i(y - y_0)) \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$= \underbrace{(x - x_0)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{(y - y_0)\sqrt{\ldots}}_{v(x,y)}$$

Veamos por def. que f es dif. en $z = z_0$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)|z - z_0| - 0}{(z - z_0)} = \lim_{z \to z_0} |z - z_0| = 0 \checkmark$$

el límite $\exists$ y vale $0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$.

Veamos ahora que f SOLO es dif. en este punto, para ello bastará verificar que las condiciones de (CR) no se tienen en $z \neq z_0$.

En efecto, primero notemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + (x - x_0) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}(x - x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \frac{2(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \frac{2(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Obs. Estas der. parciales en principio no están definidas en (x_0, y_0), sin embargo se pueden extender por continuidad a (x_0, y_0), donde valen (todas) 0. La cont. se tiene por el grado de los pol. involuc.

Sup. $(x_0 \neq x) \vee (y_0 \neq y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow (x - x_0)^2 = (y - y_0)^2 \Leftrightarrow |x - x_0| = |y - y_0|. \quad (1)$$

Por otro lado: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$ $\quad (x \neq x_0 \vee y \neq y_0)$

$(x_0 \neq x) \vee (y_0 \neq y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2(x - x_0)(y - y_0) = 0 \Rightarrow x = x_0 \vee y = y_0 \quad (2)$$

pero $(1) \wedge (2) \Rightarrow x = x_0 \wedge y = y_0$.

Esto último es una contradicción, pues asumimos durante el cálculo que $(x_0 \neq x) \vee (y_0 \neq y)$ $\therefore$ no se pueden satisfacer las cond. de (CR)

$\Rightarrow$ f es dif SOLO en $z = z_0$.

Comentario: Tal como se dijo antes, las DP en principio solo están def en $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, pero por cont. se extienden a $(x,y) = (x_0,y_0)$
mas aun, la derivada vale 0 $\Rightarrow$ las DP son continuas en (x_0,y_0).

por ej: $u(x,y) = (x - x_0)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

por def (cvv): $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(t(1,0) + (x_0,y_0)) - u(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0) - \overset{0}{\cancel{u(x_0,y_0)}}}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x_0+t-x_0)\sqrt{(x_0+t-x_0)^2 + \overset{0}{\cancel{(y_0-y_0)^2}}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\sqrt{t^2}}{\cancel{t}} = 0$$

$\therefore$ la DP en (x_0,y_0) existe y vale 0

más aun, la función: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} & (x,y) \neq (x_0,y_0) \\ 0 & (x,y) = (x_0,y_0) \end{cases}$

resulta ser continua en (x_0,y_0)

lo mismo se puede probar para $\frac{\partial u}{\partial y}$ y análogamente para $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$

Luego u y v tienen DP continuas en (x_0,y_0) $\Rightarrow$ f es dif en $z = z_0$. tal como ya habíamos visto.
y satisfacen trivialmente (CR) en (x_0,y_0)

Todas las deriv. valen 0 ahí!

P4 $u, v \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$\vec{w}(x,y,z) = u(x,y)\hat{\imath} - v(x,y)\hat{\jmath}$ $\quad \vec{w}_1(x,y,z) = v(x,y)\hat{\imath} + u(x,y)\hat{\jmath}$.

a) Veamos que $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ son conserv. ssi u, v satisf. (CR).

Notar que como u, v son C^1 en todo $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{w}$ y $\vec{w}_1$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$

Luego $\vec{w}, \vec{w}_1$ son conserv $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\,\vec{w} = \text{rot}\,\vec{w}_1 = \vec{0}$.

Probemos esto último entonces:

$$\text{rot}\,\vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ u & -v & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(0 + \cancel{\partial_z v}^{\,0}) + \hat{\jmath}\,(\cancel{\partial_z u}^{\,0} - 0) + \hat{k}\,(-\partial_x v - \partial_y u)$$

$$\text{rot}\,\vec{w}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ v & u & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(0 - \cancel{\partial_z u}^{\,0}) + \hat{\jmath}\,(\cancel{\partial_z v}^{\,0} - 0) + \hat{k}\,(\partial_x u - \partial_y v)$$

Luego $\text{rot}\,\vec{w} = \text{rot}\,\vec{w}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\partial_x v - \partial_y u = 0 \\ \wedge \ \ \partial_x u - \partial_y v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \partial_y u = -\partial_x v \\ \partial_y v = \partial_x u \end{array}$

que son las cond de (CR).

b) u, v conj $\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0 \ \wedge \ \nabla u \cdot \nabla v = 0$.

En efecto: u, v conj $\Rightarrow$ $\partial_x u = \partial_y v$ (1) $\quad$ derivemos en x (1): $\partial_{xx} u = \partial_{xy} v$ (1')

$\partial_y u = -\partial_x v$ (2) $\quad$ der. en y (2): $\partial_{yy} u = -\partial_{yx} v$ (2')

Como $u, v \in C^1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ vale el Teo. de Schwartz, es decir: $\boxed{\partial_{xy} v = \partial_{yx} v}$

Luego, sumando (1') + (2'): $\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = \partial_{xy} v - \partial_{yx} v = 0$.

ie. $\Delta u = 0$. ✓

Para v: deriv (1) en y: $\partial_{yx} u = \partial_{yy} v$ $\Rightarrow \partial_{yy} v + \partial_{xx} v = \partial_{yx} u - \partial_{xy} u$

deriv (2) en x: $\partial_{xy} u = -\partial_{xx} v$ $\qquad \underset{\text{Schartz}}{=} 0$. $\quad \therefore \Delta v = 0$ ✓

Finalmente: $\nabla u \cdot \nabla v = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = \partial_x u\, \partial_x v + \partial_y u \cdot \partial_y v$

$\underset{(CR)}{=} \partial_y v \cdot \partial_x v - \partial_x v \cdot \partial_y v = 0$ ✓

c) $\Delta u = 0 = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u \Rightarrow \exists\, v$ conj. de u, ie. $\exists\, v$ tq $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$.

Tal como dice la indicación, debemos notar que esto es equivalente a que algun campo sea conservativo. ¿Cuál campo?

Notemos que queremos encontrar (o simplemente probar la existencia) de una función v tal que:

$$\partial_x u = \partial_y v \quad , \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Por otro lado, si un campo $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ es conserv. $\Rightarrow \exists \phi \in C^1$ tal que

$$f_1 = \partial_x \phi , \quad f_2 = \partial_y \phi , \quad f_3 = \partial_z \phi .$$

Esto nos dice que debemos entonces considerar el campo

$$\vec{J} = (-\partial_y u , \partial_x u , 0)$$

Si probamos que es conserv $\Rightarrow \exists v \in C^1$ tq: $-\partial_y u = \partial_x v \wedge \partial_x u = \partial_y v$ que es lo que deseamos.

Así pues, para concluir basta ver que $\vec{J}$ es conservativo:

Como u es armónica $\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \vec{J}$ es C^1 (derivadas de u)

$\Rightarrow \vec{J}$ es conserv. si $\text{rot}\,\vec{J} = \vec{0}$, veamos que lo es:

$$\text{rot}\,\vec{J} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\partial_y u & \partial_x u & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0) + \hat{\jmath}(0) + \hat{k}(\partial_x(\partial_x u) - \partial_y(-\partial_y u))$$

$$= \hat{k}(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u) = \vec{0} \quad \text{pues } u \text{ es armónica.}$$

$$= \hat{k}(\Delta u) \qquad = \vec{0}$$

$\therefore \vec{J}$ es conservativo y se concluye. :)