Auxiliar 6 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Jueves 27 de Septiembre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca R.

Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

- Pruebe que $w_k = e^{i2k\pi/n}$ con $k \in \{1, \dots, n-1\}$, son raíces del polinomio $p(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$. Concluya que $p(z) = (z - w_1) \cdots (z - w_{n-1})$
- Considere un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unitario, tal que uno de sus vértices es $A = (1, 0)$. Al unir cualquier vértice del polígono con todos los restantes se generan $n - 1$ segmentos. A partir del vértice A , escriba las longitudes de los segmentos $AA_1, \dots, AA_{n-1}$ y pruebe que:

$$\prod_{i=1}^{n-1} AA_i = n$$

Pregunta 2.

- Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, si $z = x + iy$ entonces $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Suponga que $u = v^2$. Pruebe que f es constante en su dominio.
- Sea $f = u + iv$ una función holomorfa en un conjunto D abierto y conexo, donde u y v son funciones a valores reales. Suponga que existen constantes a, b, c tales que $a^2 + b^2 \neq 0$ y:

$$au + bv = c$$

en D . Pruebe que f es constante en D

Hint: Recuerde que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Pregunta 3.

- Encontrar la función holomorfa $f = u + iv$ tal que su parte real está definida por $u = x^2 - y^2 + 2x$ y además se tiene que $f(i) = 2i - 1$
- Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable en el sentido complejo solo en $z = z_0$.

Pregunta 4. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$. Considere los campos:

$$\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\hat{i} - v(x, y)\hat{j}, \quad \vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\hat{i} + u(x, y)\hat{j}$$

- Pruebe que $\vec{w}$ y $\vec{w}_1$ son conservativos si y sólo si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. Decimos en tal caso que u y v son conjugadas.
- Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase $\mathcal{C}^2$ entonces $\Delta u = \Delta v = 0$ (decimos en tal caso que u y v son armónicas) y además $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
- Pruebe que si $u(x, y)$ es armónica entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u .

Indicación: Note que lo anterior es equivalente a probar que un cierto campo es conservativo.