Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 24 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

(a) Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos campos vectoriales dados por $\vec{F}(x,y,z) = (xz - y)\,\hat{\imath} + (x^2y + z^3)\,\hat{\jmath} + (3xz^2 - xy)\,\hat{k}$ y $\vec{G}(x,y,z) = 2xe^{-y}\,\hat{\imath} + (\cos(z) - x^2e^{-y})\,\hat{\jmath} - y\sin(z)\,\hat{k}$. Sea Γ la curva cerrada, correspondiente al rectángulo recorrido según el orden de los vértices $ABCD$ con $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,1)$, $C = (2,0,1)$ y $D = (2,0,0)$.

(i) Demuestre que $\vec{F}$ no es conservativo, y determine el valor de $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$

(ii) Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar ϕ tal que $\nabla\phi = \vec{G}$ y determine el valor de $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{G} \cdot \vec{dr}$

(b) Considere el campo $\vec{F} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$

(i) Escriba $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.
<u>Indicación</u>: Recuerde que $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$ y que $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$

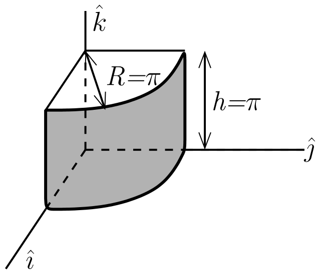
(ii) Calcule $div(\vec{F})$.

(iii) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R > 0$, orientada según la normal **interior** a esta, que no intersecte al eje OZ.

Pregunta 2. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z\sin(y) + xy^2z)\hat{\imath} + (e^x\cos(z) + x^2yz)\hat{\jmath} + (x^2e^y)\hat{k}$$

sobre el **manto** (parte sombreada) del cuarto de cilíndro de radio y altura π de la figura, con la normal orientada hacia el exterior.



Pregunta 3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x\sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\hat{k}$$

(a) Calcule $rot(\vec{F})$.

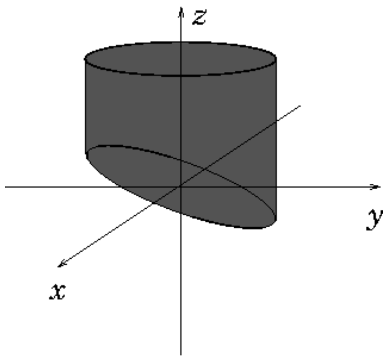
(b) Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\Gamma : \quad \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcule:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

<u>Indicación</u>: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilíndro de la figura siguiente:


z
y
x