Aux extra - CAA - Sec 3 - 2012/2 | Prof: C^2R
Aux: MGC

P1 a) $\vec{F}(x,y,z) = (\overset{F_1}{y^2\cos x + z^3}, \overset{F_2}{2y\,\text{sen}(x) - 4}, \overset{F_3}{3xz^2+2z})$ (obs. $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$)

Para verif. que es conserv basta ver que $\text{rot}\vec{F} = 0$
o encontrar el potencial de forma explícita:

Queremos $\phi(x,y,z)$ tq $\vec{F} = \nabla\phi$.

$\Leftrightarrow F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z}$.

$F_1 = y^2\cos x + z^3 = \frac{\partial\phi}{\partial x}$

$\Rightarrow \int y^2\cos x + z^3\, dx = \phi(x,y,z) + C_1(y,z)$

$\boxed{y^2\,\text{sen}\,x + z^3 x = \phi(x,y,z) + C_1(y,z)}$

$F_2 = 2y\,\text{sen}\,x - 4 = \frac{\partial\phi}{\partial y}$

$\Rightarrow \phi(x,y,z) + C_2(x,z) = \int 2y\,\text{sen}\,x - 4\, dy = \boxed{y^2\,\text{sen}\,x - 4y}$.

$F_3 = 3xz^2 + 2z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$

$\Rightarrow \phi(x,y,z) + C_3(x,y) = \int 3xz^2 + 2z\,dz = \boxed{xz^3 + z^2}$.

$\therefore \phi(x,y,z) = xz^3 + z^2 + \tilde{C}_3(x,y) = y^2\,\text{sen}\,x - 4y + \tilde{C}_2(x,z)$
$= y^2\,\text{sen}\,x + z^3 x + \tilde{C}(y,z)$

$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y,z) = y^2\,\text{sen}\,x + z^3x + z^2 - 4y + C}$

$\therefore \vec{F}$ es conserv. y su pot es $\phi(x,y,z) = y^2\,\text{sen}\,x + z^3x + z^2 - 4y + C \quad \forall C$ cte.

b) $\vec{G}(x,y,z) = (y^2\cos x + 2z^3, 2y\,\text{sen}\,x - 4, 3xz^2 + 2z)$

Quiero $\int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$ para Γ dado por $\left\{\begin{array}{l}\text{arco } y = x^2,\ z = 0 \text{ de } (0,0,0) \text{ a } (1,1,0) \\ \text{u recta } (1,1,0) \text{ a } (0,0,1)\end{array}\right\}$

Sol. Notar que: $\vec{G} = \vec{F} + (z^3, 0, 0)$

$\Rightarrow \int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \nabla\phi\cdot d\vec{r} + \int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r}$

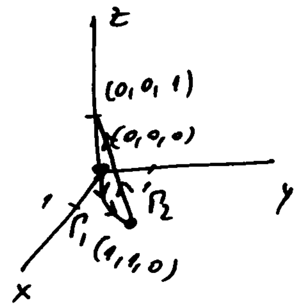
$$= \phi(\text{final } \Gamma) - \phi(\text{inicial } \Gamma) + \int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r}$$

$$= \phi(0,0,1) - \phi(0,0,0) + \int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r}$$

$\uparrow$
da igual el C, pues se cancela

$$= 0^2\cdot \text{sen}\, 0 + 1^3\cdot 0 + 1^2 - 4\cdot 0 + \cancel{C} - (0 + \cancel{C}) + \int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r}\,.$$

$$= 1 + \int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r}$$



$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$= \{(x,y,z) \,/\, x = y^2,\ z = 0,\ x\in[0,1]\}$$

$$\cup\ \{(x,y,z)\,/\, z = 1-\left(\frac{x+y}{2}\right),\ x = y,\ x\in[0,1]\}.$$

$$\int_\Gamma (z^3,0,0)\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\cdot d\vec{r}$$

Param de Γ_1: $\vec{r}(t) = (t^2, t, 0)\quad t\in[0,1] \Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (2t, 1, 0)$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\cdot d\vec{r} \underset{\substack{\uparrow \\ z=0 \text{ en } \Gamma_1}}{=} 0$$

Param de Γ_2: $\vec{r}(t) = (1-t, 1-t, t)\quad t\in[0,1]$.

$\vec{r}\,'(t) = (-1,-1,1)$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix} dt = \int_0^1 -t^3\,dt = -\frac{t^4}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore \int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = 1 + 0 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad //.$$

P2 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (\cancel{P}, \cancel{Q})$

$\vec{F}\cdot d\vec{r}$ con $\vec{F} \doteq (M,N)$

Notar que green dice que: $\displaystyle\oint_{\partial S} M\,dx + N\,dy = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy$

En nuestro caso $M(x,y) = \cancel{0}$
$N(x,y) = \cancel{0}x$
$\Rightarrow \displaystyle\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \frac{\partial x}{\partial x} - 0\,dx\,dy = \iint_S 1 \overbrace{dx\,dy}^{dA \text{ carte.}}$
$= \text{Area}(S).$

S en nuestro caso es el area encerrada por la curva dicha.

osea $\displaystyle\oint_\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \text{Área enc. por } \Gamma$

Param. $x = \cos^3\theta \quad y = \operatorname{sen}^3\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$
$dx = 3\cos^2\theta \cdot (-\operatorname{sen}\theta) \quad dy = 3\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta.$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\cos^2\theta \cdot (-\operatorname{sen}\theta) \\ 3\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\operatorname{sen}^2\theta \cos^4\theta\,d\theta \underset{\text{inmun.}}{=} 3\cdot\frac{(2-1)}{(2+4)} \int_0^{2\pi} \cos^4\theta \operatorname{sen}^0\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{6}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{3}{6}\cdot\frac{4-1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta$$

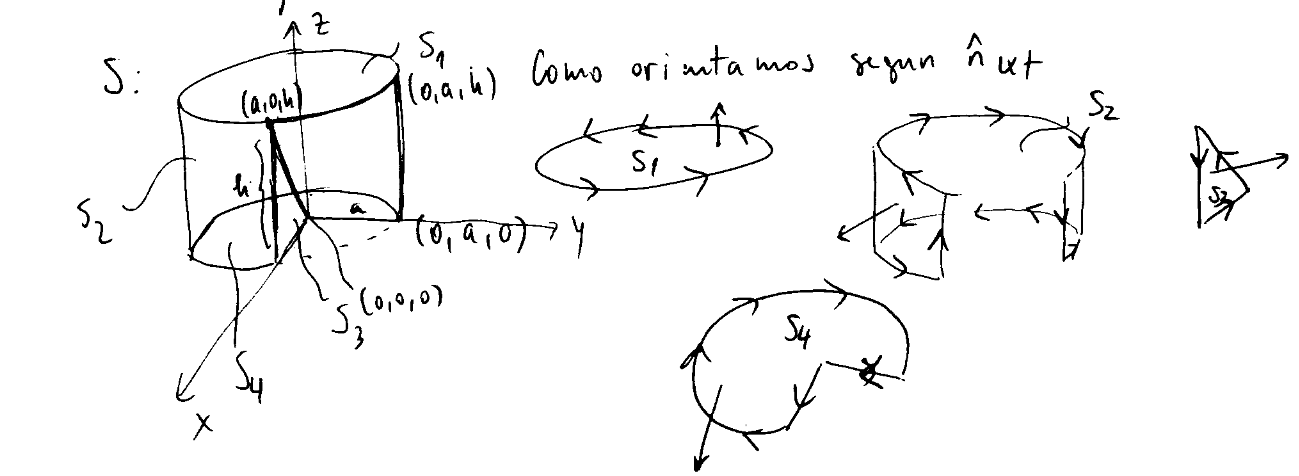
$$= \frac{\cancel{3}}{2\cancel{6}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\int_0 d\theta$$

$$= \frac{3}{16} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

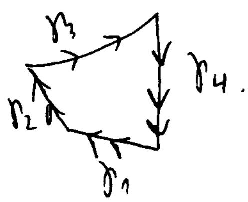
P3 a) $\vec{F} = (y, z, 2x)$ queremos $I = \iint_S \text{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{S}$ por Gauss

así, hay que ver el borde efectivo de S y luego calcular la integral por def.

Notemos que:



$\Rightarrow$ "Sumando" y cancelando los caminos en dir. opuesta se tiene que

$\partial S =$ 

$$\Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Para γ_1 Es segmento recto que une $(0, a, 0)$ con $(0,0,0)$

$\Rightarrow$ param: $\vec{r}_1(t) = (a-t)\hat{j}$ $\quad t \in [0, a]$ $\Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (0, -1, 0)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^a \begin{pmatrix} a-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0.$$

γ_2 Segmento recto que une $(0,0,0)$ con $(a, 0, h)$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = (at, 0, ht)$ $\quad t \in [0,1]$ $\Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (a, 0, h)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ ht \\ 2at \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ h \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2aht\,dt = 2ah\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = ah.$$

γ_3 Arco de circ. que une $(a,0,h)$ con $(0,a,h)$
(radio a, centro $(0,0,h)$)

$\Rightarrow \vec{r}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t, h)$ $\quad t \in [0, \pi/2]$ $\Rightarrow d\vec{r}/dt = (-a\,\text{sen}\,t, b\cos t, 0)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} a\,\text{sen}\,t \\ h \\ 2a\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\,\text{sen}\,t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -a^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\,dt + ah \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = -\frac{\pi}{4}a^2 + ah$$

γ_4 Segmento recto que une $(0,a,h)$ con $(0,a,0)$

$\vec{r}(t) = (0, a, h-t)$ con $t \in [0,h] \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (0,0,-1)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^t \begin{pmatrix} a \\ h-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0.$$

$$\therefore \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\pi}{4} a^2 + 2ah$$

b) $\mathscr{C}$ curva cerrada, simple y regular sobre $x^2+y^2=1$.

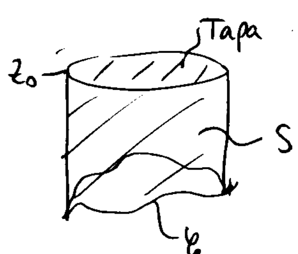
Calcular $\oint_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con $\vec{F} = (2y^2, x^2, 3z^2)$

Sol. Calculemos $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 2y^2 & x^2 & 3z^2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(2x-4y)$.

$= (2x-4y)\hat{k}$.

Nos gustaría usar stokes, para ello necesitamos superf. finita que tenga a $\mathscr{C}$ como frontera, consid:

$S =$ Manto del cil superior a $\mathscr{C}$ (~~con altura suf. grande tal que~~
$\cup$ Tapa (a altura z_0 suf. grande tal que No corte a $\mathscr{C}$)

idea 

Obs. Como no nos dicen como se orienta S las normales a escoger pueden ser ext o int.

así, por Stokes: $\oint_{\mathscr{C}=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Manto}} \text{rot}\,\vec{F} \cdot \underset{\pm\hat{\rho}}{\hat{n}}\, dS + \iint_{\text{Tapa}} \text{rot}\,\vec{F} \cdot \underset{\pm\hat{k}}{\hat{n}}\, dS$

Conclusión: $\oint_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \; \forall\, \mathscr{C}$ curva cerrada en el manto del cil.

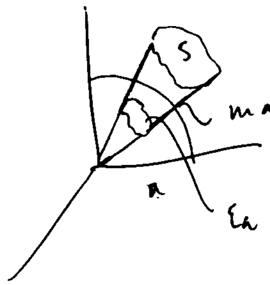
así, $\iint_{\text{Manto}} \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Manto}} (2x-4y)\underbrace{\hat{k} \cdot \pm\hat{\rho}}_{=0}\, dS = 0$

y $\iint_{\text{Tapa}} \text{rot}\,\vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{\text{Tapa}} (2x-4y)\underbrace{\hat{k} \cdot \pm\hat{k}}_{\pm 1}\, dS = \pm 1 \cdot \iint_{\text{Tapa}} (2x-4y)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2\rho\cos\theta - 4\rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta.$

$= 0$ (sen y cos int. 0)

P4 Spg $\vec{p} = \vec{0}$ (sino traslado el origen) Ω: Unión de rectas que pasan por el origen y cortan a S en 1 pto. ("cono que tiene a S como base")

así:



apliquemos el Teo de la div en

$\tilde{\Omega}$:

$\vec{F} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \dfrac{\hat{r}}{r^2}$ en esféricas.

$\tilde{\Omega}$ = ptos de Ω acotados por superf Σ_a y S.

$$\Rightarrow \iint_{\tilde{\Omega}} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS + \iint_{\Sigma_a} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS + \iint_{\text{Manto}} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS$$

$\hat{n}$: normal Exterior

Notar que $\Sigma_a \subseteq S(0,a)$ $\therefore$ en Σ_a: $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \dfrac{\vec{r}}{r \cdot r^2} = \dfrac{\hat{r}}{\underset{a^2}{r^2}}$ y $\hat{n} = -\hat{r}$

a^2 pues estoy en $S(0,a)$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma_a} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (-\hat{r})\, dS = -\frac{\text{área}(\Sigma_a)}{a^2}$$

Por otra parte: $\displaystyle\iint_{\text{Manto}} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS = 0$. pues en el Manto $\hat{n} \perp \vec{x}$ (al ser rectas que unen Σ_a con Manto)

Finalmente:

$$\iint_{\Omega} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS \underset{\text{Teo Div}}{=} \iiint_{\text{Vol}(\Omega)} \text{div}\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV = \iiint_{\text{Vol}(\Omega)} \left[\frac{1}{r^2 \sin\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\left(\frac{1}{\cancel{r^2}} \cancel{r^2} \sin\varphi\right)}_{0} + 0 + 0\right] dV$$

$$= 0$$

$$\therefore \iint_{\Omega} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS = 0 = \iint_S \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS + \underbrace{\iint_{\Sigma_a} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS}_{-\frac{\text{área}(\Sigma_a)}{a^2}} + \underbrace{\iint_{\text{Manto}} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS}_{0}$$

$$\therefore s = \frac{\text{área}(\Sigma_a)}{a^2} = \iint_S \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n}\, dS \quad \blacksquare$$