Auxiliar Extra Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 12 de Septiembre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Verifique que
$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$
es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar asociado.

b) Considere ahora
$$\vec{G}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + 2z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$
Calcule $\int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$, donde Γ es la curva que consta del arco $y = x^2$, $z = 0$ que parte desde el origen y llega al punto $(1,1,0)$ unida al segmento recto que une los puntos $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Pregunta 2. Considere la función en $\mathbb{R}^2$ dada por: $F(x,y) = x\hat{j}$. Aplicando el teorema de Green a esta función, calcule el área total encerrada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
Indicación: Use la parametrización $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. Además le serán útiles las siguientes identidades:
$$\int_0^{2\pi} \cos^m\theta \sin^n\theta d\theta = \frac{n-1}{m+n}\int_0^{2\pi}\cos^m\theta\sin^{n-2}\theta d\theta, \quad \int_0^{2\pi}\cos^m\theta d\theta = \frac{m-1}{m}\int_0^{2\pi}\cos^{m-2}\theta d\theta$$

Pregunta 3.

a) Calcule $I = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ mediante el Teorema de Stokes, para $\vec{F}(x,y,z) = (y, z, 2x)$ y la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ donde:
- S_1: Disco de radio a con centro $(0,0,0)$, ubicado en el plano XY.
- S_2: $\frac{3}{4}$ de manto de cilindro de radio a y altura h. ubicado entre los planos $z = 0$ y $z = h$, donde el cuarto vacío queda en el primer octante.
- S_3: Triángulo rectángulo de catétos a y h. Con vértices $(0,0,0)$, $(a,0,h)$ y $(a,0,0)$.
- S_4: $\frac{3}{4}$ disco de radio a, ubicado en el plano $z = 0$, donde el cuarto vacío queda en el primer octante.

Considere que el eje del cilíndro es el eje Z, que el plano XY contiene a S_4, y que el plano XZ contiene a S_3.

b) Sea $\mathcal{C}$ una curva simple cerrada y regular sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcule el trabajo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (2y^2, x^2, 3z^2)$ a lo largo de $\mathcal{C}$.
Indicación: Calcule $\mathrm{rot}\vec{F}$

Pregunta 4. Sean S una superficie suave y $\vec{P}$ un punto, tales que toda recta que pasa por $\vec{P}$ corta a S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semi-rectas que parten de $\vec{P}$ y pasan por S, y sea ε_a la intersección de Ω con la superficie esférica de centro $\vec{P}$ y radio a. Demuestre que:
$$s = \frac{\text{Area de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{x}-\vec{P})\cdot\hat{n}}{||\vec{x}-\vec{P}||^3}dS$$

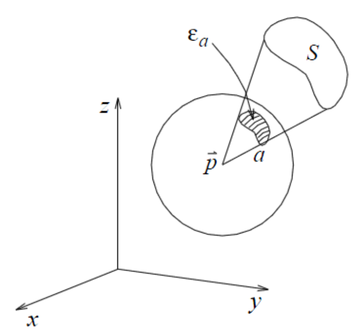

Figura 1: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a $\vec{P}$