Auxiliar 5 - CAA - 2012|2 - Sec 3

P1| $\vec{F} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

Pdq: $\operatorname{div}(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g \operatorname{div}(\vec{F})$ Obs. La probamos en la Aux 1!

Dem. $g\vec{F} = g(F_1, F_2, F_3) = (gF_1, gF_2, gF_3)$. Not: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(g\vec{F}) = \operatorname{div}(gF_1, gF_2, gF_3)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(gF_i) = \sum_{i=1}^{3} F_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot F_i}_{} + g \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g \\ \partial_{x_2} g \\ \partial_{x_3} g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + g \operatorname{div}(\vec{F})$$
$$= \nabla g \cdot \vec{F} + g \operatorname{div}(\vec{F}). \checkmark$$

Probemos ahora que, dados $g, f \in C^2(\Omega'; \mathbb{R})$ con $\Omega \cup \partial\Omega \subset \Omega'$ se tiene: y Ω suf. regular

$$\iiint_{\Omega} (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV = \iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S}$$

Esto último es consecuencia del Teo. de Gauss, en efecto, consideremos el campo vectorial $\vec{H} = g\nabla f$, notar que $\vec{H} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ gracias a la regul. de f y g

$\therefore$ Por Gauss: $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{H})\, dV$, $\partial\Omega$ orient según $\hat{n}$ ext.

pero $\vec{H} = g\underbrace{\nabla f}_{\vec{F}} \Rightarrow \underset{\operatorname{div}(g\nabla f)}{\operatorname{div}(\vec{H})} = \operatorname{div}(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g\operatorname{div}(\vec{F})$
$$= \nabla g \cdot \nabla f + g\underbrace{\operatorname{div}(\nabla f)}_{\Delta f} = \nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f.$$

$\therefore \displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f)\, dV$ que era lo deseado.

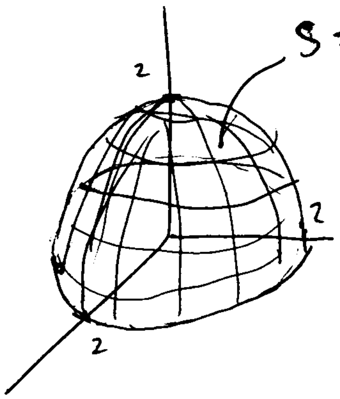
b) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0\}$ orientado con $\hat{n}_{ext}$ a esfera.

Debemos calcular:

$$\Phi = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}\,, \quad \vec{F} = (e^z - x^2y)\hat{\imath} + (z+xy^2)\hat{\jmath} + y^2\sqrt{1+z^4}\,\hat{k}$$

(Obs. El enunciado original es con $z\geq 1$, así lo hicimos en clase; pero todo es COMPLETAMENTE análogo)

Sol. gráfico de S:



S = hemisf superior de $\partial B(0,2)$

Notemos algunas cosas:

1) ∂S = ~~circunferencia~~ circunferencia de centro $(0,0,0)$ y radio 2 (en el plano XY)

2) $$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \hat{\jmath}(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \hat{k}(\partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

$$= \hat{\imath}\left(2y\sqrt{1+z^4} - 1\right) + \hat{\jmath}(e^z - 0) + \hat{k}(y^2+x^2)$$

y obviamente $\operatorname{div}(\nabla\times\vec{F}) = 0$.

Uno se tentaría (pues $\operatorname{div}(\nabla\times F)=0$) a usar el Teo. de la div (Gauss) y decir:

$$\iint_{S=\partial\Omega} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega = \text{mitad bola}} \operatorname{div}(\nabla\times F)\,dV = 0$$

pero esto es INCORRECTO pues S no es cerrada $\Rightarrow$ hay que cerrar la superficie de modo tal que $\partial(\text{Mitad Bola}(0,2)) = \tilde{S}$

Si consideramos $\tilde{S} = S \cup$ círculo de centro $(0,0,0)$, radio 2, en el plano XY

$$\Rightarrow \partial\underbrace{\{x^2+y^2+z^2\leq 4 \wedge z\geq 0\}}_{=\Omega} = \tilde{S} = S \cup \text{"Tapa"}$$

y en tal caso: $$\iint_{\tilde{S}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla\times F)\,dV = 0 \Rightarrow \iint_{\tilde{S}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$$

pero: $$\iint_{\tilde{S}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Tapa}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_{\text{Tapa}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}}$$

(orientadas con $\hat{n}_{ext}$ a Ω)

El flujo en la tapa se debe hacer por definición.

$$\iint_{\text{Tapa}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \ ?$$

$\text{Tapa} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 4 \wedge z=0\}$

$\hat{n}_{ext} = -\hat{k}$

$\hat{k} = \hat{n}_{ext}$ Obs. Está normalizado!

Param: $\vec{\sigma}(\rho,\theta) = \rho\hat{\rho}$, $\rho \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$

$= (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$

$$\Rightarrow (\nabla\times\vec{F})(\sigma(\rho,\theta)) = \begin{pmatrix} 2\rho\sin\theta\sqrt{1+0^2} \\ e^0 = 1 \\ \rho^2 \end{pmatrix}$$

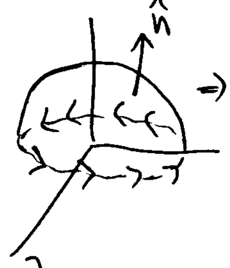
$$\therefore \iint_{\text{Tapa}} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{pmatrix} 2\rho\sin\sqrt{1} \\ e^0=1 \\ \rho^2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\frac{\sigma_\rho\times\sigma_\theta}{\|\sigma_\rho\times\sigma_\theta\|}} \overbrace{\rho\, d\rho\, d\theta}^{\|\sigma_\rho\times\sigma_\theta\| d\rho d\theta} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 -\rho^3\, d\rho\, d\theta = -2\pi\left(\frac{16}{4}\right)$$

$$= -8\pi.$$

$$\therefore \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = -\left(-\frac{16\pi}{2}\right) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

<u>Otra forma</u>: Usar Stokes, como todo es suf. regular, tendríamos:

$$\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ con $\partial S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=4,\ z=0\}$ orientado según la normal ext. a S:



$\Rightarrow$ <u>sent antihor.</u>

Así pues, basta calcular $\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Param. de ∂S: $\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$

$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$ $\quad \theta \in [0,2\pi]$

$$\therefore \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^0 - 8\cos^3\theta\sin\theta \\ 0 + 8\cos\theta\sin^2\theta \\ 4\sin^2\theta\sqrt{1+0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ 2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta.$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\sin\theta + \underbrace{16\cos^4\theta\sin^2\theta + 16\cos^2\theta\sin^2\theta}_{32\cos^2\theta\sin^2\theta = 8(\sin 2\theta)^2} + 0\, d\theta = \cancel{2\cos\theta\Big|_0^{2\pi}}^{\,0} + 8\int_0^{2\pi}(\sin 2\theta)^2\, d\theta.$$

$= 8\pi$ igual a lo de antes :)

P2 $U(r) = K\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ (coord. esf.), $K<0$, $\alpha>0$.

a) Encontrar $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

U es C^∞ en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, recordemos el gradiente en esféricas:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\hat{r} + \left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\hat{\theta} + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\hat{\varphi}$$

pero $U(r,\theta,\varphi) = U(r) \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial\theta} = \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$.

$$\therefore\ \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\hat{r} = \left(-\alpha K\frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{K}{r}\cdot\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)\hat{r}\ \left(= \left(-\alpha U(r) - \frac{1}{r}U(r)\right)\hat{r} = \left(\left(-\alpha-\frac{1}{r}\right)U(r)\right)\hat{r}\right)$$

$$\therefore\ \vec{F} = \left(\alpha+\frac{1}{r}\right)U(r)\,\hat{r}$$

b) $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\vec{S}$ con $S = \mathrm{esf}(\vec{0},a)$, $\hat{n} = \hat{r}$.

$$\iint_S \left(\alpha+\frac{1}{r}\right)U(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\,dA \underset{\substack{\uparrow\\ \text{en } S(0,a)\\ r=a}}{=} \iint_S \left(\alpha+\frac{1}{a}\right)U(a)\,dA = \left(\alpha U(a) + \frac{1}{a}U(a)\right)\underbrace{\mathrm{Area}(S)}_{4\pi a^2}$$

$$\boxed{\Phi = \left(\alpha+\frac{1}{a}\right)U(a)\cdot 4\pi a^2.}$$

c) Pdq. $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

$$\Delta U = \mathrm{div}(\nabla U) \overset{\substack{\nabla U \text{ solo tiene componente en } r\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{r^2\cancel{\mathrm{sen}\varphi}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(-\alpha-\frac{1}{r}\right)U(r)\cdot r^2\cancel{\mathrm{sen}\varphi}\right)$$

$$\left(\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{sen}\,\varphi\,F_\varphi)\right)$$

$$\left(= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u\cdot h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v\cdot h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w\cdot h_u h_v)\right]\right)$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\alpha r^2 U(r) - rU(r)\right) = \frac{1}{r^2}\left(-2\alpha r U(r) - \alpha r^2 U'(r) - U(r) - rU'(r)\right)$$

$$= -\frac{2\alpha}{r}U(r) - \alpha U'(r) - \frac{U(r)}{r^2} - \frac{1}{r}U'(r) \qquad \text{pero } U'(r) = \left(-\alpha-\frac{1}{r}\right)U(r)$$

$$= -\frac{2\alpha}{r}U(r) - \alpha\left(-\alpha-\frac{1}{r}\right)U(r) - \frac{U(r)}{r^2} - \frac{1}{r}\left(-\alpha-\frac{1}{r}\right)U(r)$$

$$= \cancel{-\frac{2\alpha}{r}U(r)} + \alpha^2U(r) + \cancel{\frac{\alpha}{r}U(r)} - \cancel{\frac{U(r)}{r^2}} + \cancel{\frac{\alpha}{r}U(r)} + \cancel{\frac{U(r)}{r^2}}$$

$$= \alpha^2 U(r)\ \square$$

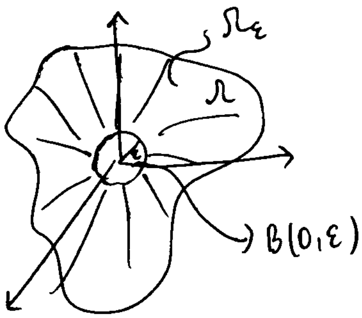
d) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abto. acotado, $0 \in \Omega$. $\partial\Omega$ sup. regular a trozos. orient por $\hat{n}_{ext}$.

<u>Pdq</u>: $$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

<u>Sol</u>. Dado que $0 \in \Omega$ y $\vec{F} = -\nabla U = \left(\alpha + \frac{1}{r}\right) U(r) \hat{r} \in C^\infty \setminus \{0\}$ entonces <u>NO</u> es posible aplicar directamente el Teo. de Gauss

¿Cómo poder usarlo? (Dado que Ω es un abto. genérico ciertamente necesitamos usar el Teo. de algún modo, pues no podemos calcular la integral "a mano").

Consideremos el abierto $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(0,\varepsilon)$ con ε suf. pequeño tal que $B(0,\varepsilon) \subset \Omega$.



En Ω_ε se tiene que $0 \notin \Omega_\varepsilon \Rightarrow$ se tienen las hipótesis para el Teorema de Gauss

$$\therefore \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega_\varepsilon} div(\vec{F}) dV = \iiint_{\Omega_\varepsilon} div(-\nabla U) dV$$

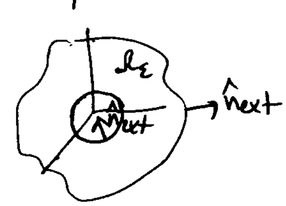
$$= \iiint_{\Omega_\varepsilon} -\Delta U \, dV \underset{c)}{=} -\iiint_{\Omega_\varepsilon} \alpha^2 U dV$$

pero $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(0,\varepsilon)$

$$\therefore \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

ambas integrales según <u>la normal exterior a Ω_ε</u>

$\Rightarrow$ La normal para $\partial\Omega$ es la misma que buscamos, para $\partial B(0,\varepsilon)$ es $-\hat{r}$!!



$$= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \vec{F} \cdot (-\hat{r}) dA$$

$$= \underbrace{\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\text{la que buscamos}} - \underbrace{\iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \vec{F} \cdot \hat{r} dA}_{\text{Calculado en b) con } a=\varepsilon}$$

$$\therefore \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \vec{F} \cdot \hat{r} dA - \alpha^2 \iiint_{\Omega_\varepsilon} U dV$$ para ε tq $B(0,\varepsilon) \subset \Omega$

$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \left(\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\right) U(\varepsilon)\cdot 4\pi\varepsilon^2 - \alpha^2 \iiint_{\Omega_\varepsilon} U\,dV$$

$$= \alpha U(\varepsilon) 4\pi\varepsilon^2 + U(\varepsilon) 4\pi\varepsilon - \alpha^2 \iiint_{\Omega_\varepsilon} U\,dV$$

$$= K \frac{e^{-\alpha\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}} 4\pi\varepsilon^{\cancel{2}} + K\frac{e^{-\alpha\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}} 4\pi\cancel{\varepsilon} - \alpha^2 \iiint_{\Omega_\varepsilon} U\,dV$$

Obs. NO hay contradic. con Gauss pues no se cumplían sus hipótesis en Ω ($\vec{F}$ no era C^1 en Ω)

$$\therefore \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 4\pi K e^{-\alpha\varepsilon}\cdot\varepsilon + K\cdot 4\pi e^{-\alpha\varepsilon} - \alpha^2 \iiint_{\Omega_\varepsilon} U\,dV$$

Tomando el límite $\varepsilon \to 0$: $4\pi K e^{-\alpha\varepsilon}\cdot\varepsilon \to 0$, $4\pi K e^{-\alpha\varepsilon} \to 4\pi K$, $\Omega_\varepsilon \to \Omega$.

$$= 0 + 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U\,dV = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U\,dV \quad \text{Lo pedido.}$$

¿Pq? : Solo así aseguramos la inclusión en Ω, además debido a la igualdad pedida (con Ω, no Ω_ε!)

P3) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abto. acot con $\partial\Omega$ regular. $u(x,y,z,t)$ temp. en (x,y,z) y tpo t.

$$(EC)\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\times(0,\infty) \\ u(x,y,z,t) = 0 & \partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) & \Omega \end{cases} \qquad u_0 \in C^1(\Omega)$$

Pdq $U(t) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega u(x,y,z,t)^2\,dV + \int_0^t \iiint_\Omega \|\nabla u(x,y,z,s)\|^2\,dV\,ds$ es cte. $\forall t \geq 0$.

y deducir unicidad para (EC)

Sol. Notar que $U: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, luego basta probar que $U'(t) = 0 \ \forall t > 0$.

$$\Rightarrow U'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\iiint_\Omega u(x,y,z,t)^2\,dV\right) + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \iiint_\Omega \|\nabla u(x,y,z,s)\|^2\,dV\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\cdot \cancel{2}u(x,y,z,t)\,dV + \iiint_\Omega \|\nabla u(x,y,z,t)\|^2\,dV$$

Teo. Leibniz $\quad$ TFC

pero: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = \Delta u(x,y,z,t)$

$$= \iiint_\Omega (u\cdot\Delta u + \|\nabla u\|^2)\,dV \qquad \text{Por P1) a) con } f = g: \ \iiint_\Omega f\Delta f + \|\nabla f\|^2 = \iint_{\partial\Omega} f\nabla f\,d\vec{S}$$

$\therefore\ U'(t) = \iint_{\partial\Omega} (u \cdot \nabla u) \cdot d\vec{S}$ pero $u(x,y,z,t) = 0$ en $\partial\Omega \times (0,\infty)$

$= 0$ $\therefore\ U(t)$ es constante en $(0,\infty)$ (y por continuidad también en $t=0$)

$\Rightarrow U(t) = U(0) \quad \forall t \geq 0$

$$= \frac{1}{2}\iiint_\Omega u(x,y,z,0)^2 dV + \cancel{\int_0^0 \iiint_\Omega \|\nabla u(x,y,z,s)\|^2 dV ds}^{\,0}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_\Omega u(x,y,z,0)^2 dV = \frac{1}{2}\iiint_\Omega u_0(x,y,z)^2 dV.$$

Para la unicidad: Supongamos que existan dos soluciones de (EC) u_1 y u_2, luego estas satisfacen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 & \Omega \times (0,\infty) \\ u_1(x,y,z,t) = 0 & \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u_1(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 & \Omega \times (0,\infty) \\ u_2(x,y,z,t) = 0 & \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u_2(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) \end{cases}$$

Obs. La cond. inicial DEBE ser la misma, es un DATO del problema.

Sea ahora $w = u_1 - u_2 \Rightarrow$ •) $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_1 - \Delta u_2 = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta w$

•) $w(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t) - u_2(x,y,z,t) = 0 - 0 = 0$ en $\partial\Omega \times (0,\infty)$

•) $w(x,y,z,0) = u_1(x,y,z,0) - u_2(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) - u_0(x,y,z) = 0$ en Ω.

$\therefore\ w$ satisface: $(EC)\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w & \Omega \times (0,\infty) \\ w(x,y,z,t) = 0 & \partial\Omega \times (0,\infty) \\ w(x,y,z,0) = \underbrace{0}_{\text{"}=w_0\text{"}} & \Omega \times (0,\infty) \end{cases}$

Luego, para w: $U_w(t) = U_w(0) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega w_0(x,y,z) dV = \frac{1}{2}\iiint 0\, dV = 0$!!

$$\therefore\ U_w(t) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega w(x,y,z,t)^2 dV + \int_0^t \iiint_\Omega \|\nabla w(x,y,z,s)\|^2 dV ds = 0$$

$\Rightarrow w(x,y,z,t) \equiv 0 \quad \Omega \times (0,\infty) \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ en $\Omega \times (0,\infty)$

$\square$

P4 a) $\Gamma = \{(x,y,z) \mid z = x^2+y^2\} \cap \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ ~~[illegible]~~

$= \{(x,y,z) \mid \underbrace{z = 1 - z^2}_{z^2+z-1=0} \wedge z = x^2+y^2\}$

$z^2+z-1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ Tomo esa pues $z \geq 0$ ($z = x^2+y^2$)

$=$ Círculo de radio ~~[illegible]~~, altura $z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Queremos calcular $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con $\vec{F} = (x^2+z)\hat{\imath} + (y^2+x)\hat{\jmath} + (z^2+y)\hat{k}$

Γ recorrida antihorario

hay 2 opciones: 1) Por def 2) Por Stokes.

Veamos el desarrollo con stokes, notar primero que $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, en particular lo es para cualquier superf. regular S tal que $\partial S = \Gamma$. $\Rightarrow$ podemos usar el Teo.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-0) + \hat{\jmath}(1-0) + \hat{k}(1-0) = (1,1,1).$$

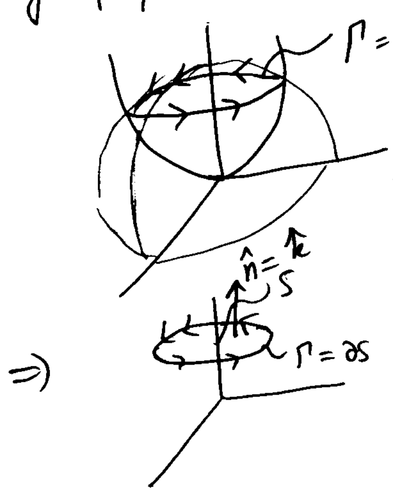
$\therefore \oint_{\Gamma = \partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA$

$\hat{n}$: normal tal que respete regla mano derecha.

¿Que superficie usar?
Cualquiera regular, orientable tq $\partial S = \Gamma$.
por ejemplo el círculo encerrado por Γ.

Grafiquemos la situación:

$\Gamma = \{(x,y,z) \mid z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge x^2+y^2 = z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$ = Circunf de radio $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ centro $(0,0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ en el plano paralelo a XY.



$\Rightarrow$ Consid: $S = \{(x,y,z) \mid z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge x^2+y^2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$ = Círculo de radio $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ centro $(0,0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$

$\hat{n} = \hat{k}$ en este caso: normaliz!

$$\therefore \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint_S \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dA = \iint_S 1\, dA = \text{Área}(S)$$

$$= \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^2$$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Por def. el cálculo es más engorroso.
y queda propuesto.

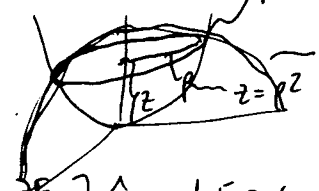
b) $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ $\quad$ Γ: interс. de $z = x^2+y^2 \wedge$ esf. unit.

•) Parametricemos Γ: En cilíndricas se tiene: $z = \rho^2 \wedge z^2+\rho^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1-z^2$.

$\Rightarrow z = 1 - z^2 \Rightarrow z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \oplus \sqrt{5}}{2}$ me quedo con la sol posit. pues $z = x^2+y^2 > 0$!

$\therefore$ $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \rho = \sqrt{z}$ $\Rightarrow \Gamma$ se param vía $\vec{r}(\theta) = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$ con $\rho \wedge z$ que recién encontramos, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$\Rightarrow$ idea:



•) $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

En efecto, en cilíndricas:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial F_z}{\partial\theta} - \rho\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\hat{\rho} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\theta) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right]\hat{k}.$$

En nuestro caso: $F_\theta = \frac{1}{\rho}$ $\quad F_\rho = 0 \quad F_z = z$.

así:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{\rho}\Big[\underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial\theta}}}_{0} - \rho\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)}}_{0}\Big]\hat{\rho} + \Big[\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}(0)}_{0} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial\rho}}(z)}_{0}\Big]\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\cancel{\rho}\,\frac{1}{\cancel{\rho}}\Big)}_{0} - \frac{\partial}{\partial\theta}(0)\Big]\hat{k}$$

Obs. Este paso vale solo si $\rho \neq 0$.

$= 0.$ ✓

•) Para calcular $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ hay dos formas:

1) Directamente: $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta}\,d\theta$ $\quad$ Como $\vec{r}(\theta) = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$ ¡$\rho \wedge z$ dados de antes! $\quad \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = \rho\hat{\theta}$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}\right)\cdot\rho\hat{\theta}\,d\theta \underset{\substack{\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}=1\\ \hat{\theta}\cdot\hat{k}=0}}{=} \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{\cancel{\rho}}\cdot\cancel{\rho}\,\underbrace{(\hat{\theta}\cdot\hat{\theta})}_{1} + z\rho\,\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{\theta})}_{0}\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0!$$

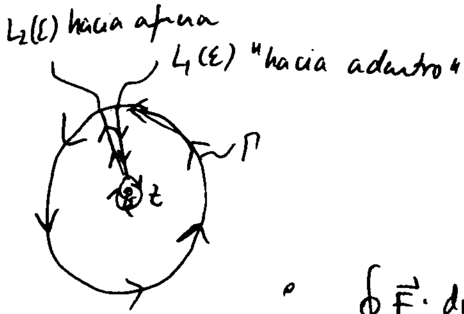
$\therefore$ $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi \neq 0$ lo cual podría parecer sorprendente considerando el Teo. de Stokes, pero veamos por qué el resultado no es extraño:

2) Cálculo vía Teo. de Stokes.

Queremos $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, por Stokes nos daría que es igual a $\iint_{D = \text{reg. enc. por } \Gamma} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ pero esto vale solo si $\vec{F}$ es $\mathcal{C}^1$ en D, lo cual no es cierto en nuestro caso

Luego, para poder usarlo, debemos elegir un dominio apropiado:

Así, consideremos $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \partial \text{circulo}(\varepsilon) \cup L_1(\varepsilon) \cup L_2(\varepsilon)$



La región encerrada por Γ_ε NO encierra al eje z $\Rightarrow \vec{F}$ es C^1 en la reg. encerrada.

Además $\Gamma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \Gamma$

$$\therefore \oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{D(\Gamma_\varepsilon)} \underbrace{\text{rot}\, \vec{F}}_{\equiv 0} \cdot d\vec{s} = 0$$

Stokes

pero: $$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{L_1(\varepsilon)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{L_2(\varepsilon)} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{=0} + \oint_{\partial \text{circulo}(\varepsilon)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Obs. ∂circulo(ε) se recorre de forma horaria!

$=0$ pues una se recorre en sent. contrario a la otra.

así:

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\oint_{\partial \text{circulo}(\varepsilon)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(-2\pi) = 2\pi$$

igual que antes pero recor. antihor y con $\rho = \varepsilon$