Auxiliar 5 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 06 de Septiembre, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Dados $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ pruebe la identidad:

$$div(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g div(\vec{F})$$

Muestre que para todo $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ con $\Omega \cup \partial\Omega \subset \Omega'$ se tiene la identidad de Green:

$$\iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot d\vec{S}$$

b) Sea S la superficie del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal superior (exterior a la esfera). Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde $\vec{F}(x, y, z) = (e^z - x^2 y)\hat{\imath} + (z + xy^2)\hat{\jmath} + y^2\sqrt{1 + z^4}\hat{k}$

Pregunta 2. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón tiene como potencial a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$:

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico de radio a ($a > 0$) orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_\Omega U dV$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Pregunta 3. *Conservación y unicidad en la ecuación del calor*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular y $u(x, y, z, t)$ la temperatura en (x, y, z) en el instante $t \geq 0$ la cual satisface:

$$(EC) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, z, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) & \text{sobre } \Omega \end{cases}$$

donde la condición inicial u_0 es una función de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que la cantidad:

$$U(t) = \frac{1}{2} \iiint_\Omega u(x, y, z, t)^2 dV + \int_0^t \iiint_\Omega ||\nabla u(x, y, z, s)||^2 dV ds$$

es constante para $t \geq 0$ y deduzca de esto la unicidad de soluciones para (EC)

Pregunta 4 Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

a) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ

b) Sea ahora $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot\vec{F} = 0$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el Teorema de Stokes.