Auxiliar 4 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 30 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Carlos Conca
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea S la superficie regular dada por las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 - 2ay \leq 0,\ a > 0,\ x \geq 0,\ z \geq 0$$

a) Bosqueje S, parametricela y calcule su área.
b) Escoja una orientación para S y calcule el flujo del campo vectorial en coordenadas cilíndricas dado por:

$$\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \cos^2\theta \cdot e^{\cos^3\theta}\hat{\theta}$$

Pregunta 2. Calcule la integral de flujo del campo $\vec{F} = (x^2, xy, xz)$ a través del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$. Oriente la normal de modo que sus componentes sean positivas.

Pregunta 3. Considere la superficie del toro de centro $\vec{0}$, radio mayor R y radio menor a ($a < R$). Sea Σ la porción de la superficie del toro que se encuentra fuera de la esfera de centro $\vec{0}$ y radio R.
a) Bosqueje Σ.
b) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F} = (x, y, z)$$

a través de Σ orientado según la normal exterior al toro.
Indicación: Recuerde que la parametrización del toro, que vimos en la Auxiliar 2, está dada por:

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((R + a\sin\varphi)\cos\theta, (R + a\sin\varphi)\sin\theta, a\cos\varphi)$$

y el vector normal a esta superficie está dado por:

$$\hat{r} = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

Pregunta 4. Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se define: $n(\Gamma) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$:
- **i)** $\vec{\varphi}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
- **ii)** $\vec{\varphi}(t) = (r\cos(t), -r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
- **iii)** $\vec{\varphi}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 4\pi]$.
- **iv)** Γ es la frontera del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

Pregunta: ¿Es $\vec{F}$ un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?. Dada Γ curva cerrada en torno al origen $(0,0)$, se le llama a $n(\Gamma)$ el número de enrollamiento anti-horario de Γ. Justifique esta terminología.

b) Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{\varphi}(t) = (2r - r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y) = \nabla g(x,y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ. Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.
Indicación: Busque g de la forma $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (recuerde que $\dfrac{d}{dt}(arctg)(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$)

c) ¿Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b)? Justifique.